Kurs: Badania Operacyjne

Forma zajęć: Ćwiczenia #1

Tryb: On-line

Problemy i zadania: PPL

Model matematyczny PP typu $m \times n$ $(m \geq 2, n \geq 2)$

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow m_0$$

$$\Downarrow$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
(*) & x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2, \dots, x_n \in I_n \\
(**) & \left.\begin{array}{l}
g_1(x_1, \dots, x_n)\ R_1\ b_1 \\
g_2(x_1, \dots, x_n)\ R_2\ b_2 \\
\vdots \\
g_m(x_1, \dots, x_n)\ R_m\ b_m
\end{array}\right\}
\end{array}
\right\},
$$

gdzie: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – zmienne decyzyjne (Z.D.)

D – zbiór rozwiązań dopuszczalnych (Z.R.D.)

F – funkcja celu

m_0 – wartość kryterium wyboru.

$I_1, I_2, \dots, I_n$ – przedziały liczbowe

$(*)$ warunki brzegowe (W.B.)

$R_1, R_2, .., R_m$ jedna z relacji „$\leq$", „$\geq$"

(**) warunki ograniczające (W.O.).

Każde P.L. można przedstawić w postaci STANDARDOWEJ, gdzie: (i) $m_0 = MAX$ lub MIN

(ii) (*): $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, .., x_n \geq 0$

(iii) (**):

Dla MAX $\begin{cases} g_1(x_1 .., x_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1 .., x_n) \leq b_m \end{cases}$

Dla MIN $\begin{cases} g_1(x_1 .., x_n) \geq b_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1 .., x_n) \geq b_m \end{cases}$

<u>Zad</u>. 1 (Lin2)

Mamy: $\mathbb{R}^4 \supset D \ni (x, y, z, u) \to f(x, y, z, u) = x^2 + 2yzu - 1 \to Min$

$(x,y,z,u) \in D \iff x \le -2,\ y \ge 3,\ z \ge -1,\ u \ge 4$

oraz

$$\begin{cases} -2x + y^2 + u - 7z \ge -2 \\ y^2 + z^2 + u^2 \le 3 \\ xyzu \le 3 \end{cases}$$

Mamy PP typu 3×4, ale nie w postaci STANDARDOWEJ (DLACZEGO?).

Przeprowadzimy procedurę STANDARYZACJI:

(i) zapisujemy W.D. w P.S.

$x \le -2 \iff x+2 \le 0 \iff -(x+2) \ge 0$

$y \ge 3 \iff y-3 \ge 0$

$z \ge -1 \iff z+1 \ge 0$

$u \ge 4 \iff u-4 \ge 0$

(ii) na tej podstawie wprowadzamy NOWE ZMIENNE $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}$, gdzie

$\tilde{x} = -(x+2)$, $\tilde{y} = y-3$, $\tilde{z} = z+1$, $\tilde{u} = u-4$, dla których mamy

$\tilde{x} \ge 0$, $\tilde{y} \ge 0$, $\tilde{z} \ge 0$, $\tilde{u} \ge 0$

(ii) zapiszmy funkcję celu w nowych zmiennych:

$$\mathbb{R}^4 \supset \tilde{D} \ni (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}) \longrightarrow \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}) \to \mathrm{Min},$$

gdzie

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}) = F(x, y, z, u) \Big|_{\substack{x = -(\tilde{x}+2) \\ y = \tilde{y}+3 \\ z = \tilde{z}-1 \\ u = \tilde{u}+4}}$$

$$= \left(-(\tilde{x}+2)\right)^2 + 2(\tilde{y}+3)(\tilde{z}-1)(\tilde{u}+4) - 1 \to \mathrm{Min}$$

(iii) zapiszmy W.O. w P.S.

$$\begin{cases} -2x + y^2 + u - 7z \geq -2 & \text{(dobry!)} \\ -(y^2 + z^2 + u^2) \geq -3 \\ -xyzu \geq -3 \end{cases}$$

(iv) zapiszmy W.O z (iii) za pomocą nowych zmiennych jak dla $\tilde{F}$.

<u>Dokończ!</u>!

Przypadki PPL

Jeśli F oraz $g_1, \ldots, g_m$ są liniowe, to PP nazywamy PPL.

Zad 1 (Lista 1)

Mamy:

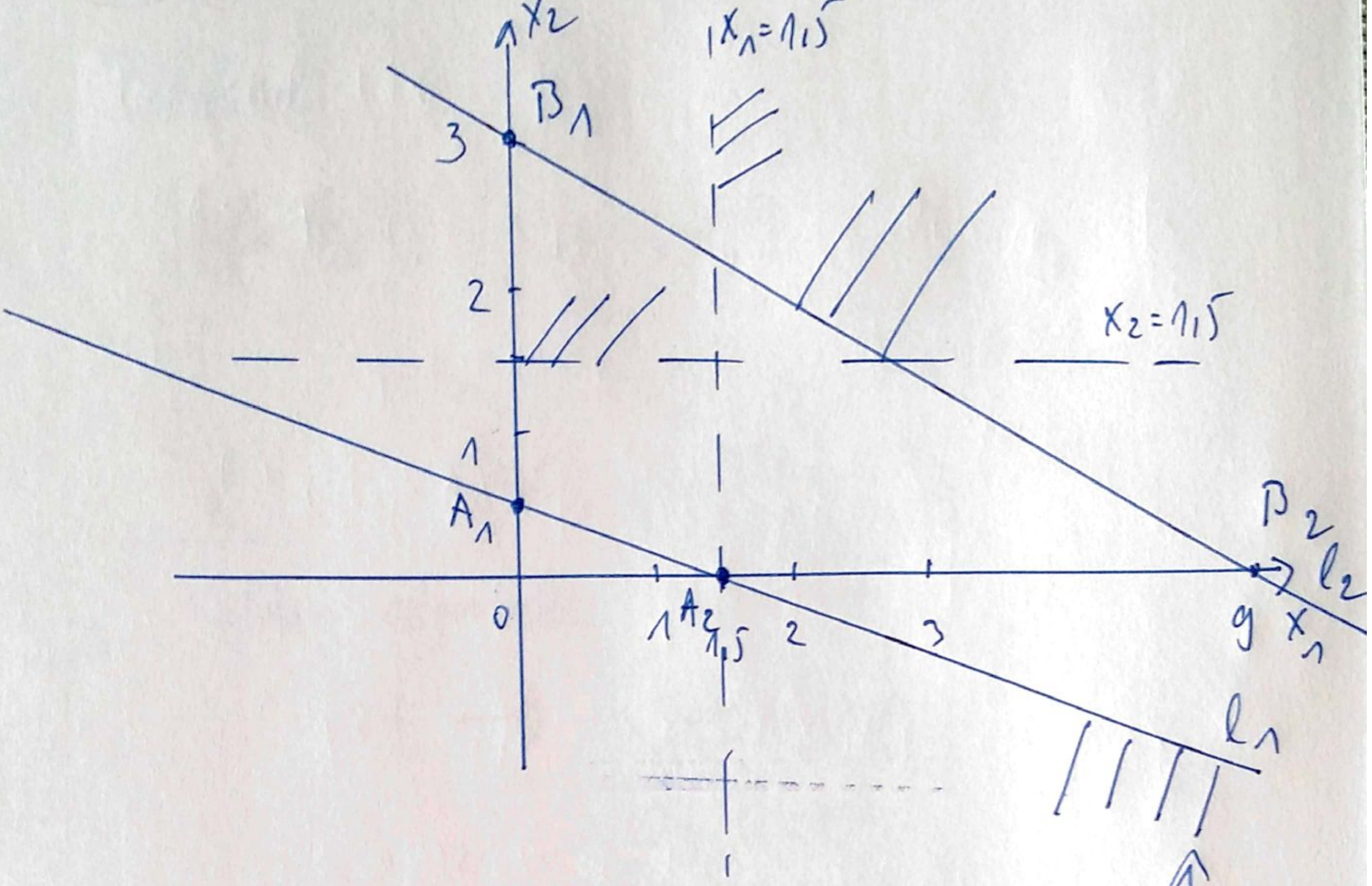
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 6 \to \max$$

$$(x_1, x_2) \in D \iff$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 1{,}5, \quad x_2 \geq 1{,}5 \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 1{,}5 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{cases} \end{array}\right\} \quad (*)$$

Mamy PP, ale nie jest PPL (DLACZEGO?)

Metodą „szkolną" rozwiązujemy układ $(*)$. Przejdź do geometrycznej ilustracji Z.R.D. – dziedziny F.C.



$l_1: x_1 + 3x_2 = 1{,}5$

$x_1 = 0, \; x_2 = 0{,}5 \quad A_1(0, 0{,}5)$

$x_2 = 0, \; x_1 = 1{,}5 \quad A_2(1{,}5, 0)$

Rozwiązaniem $x_1 + 3x_2 \le 1{,}5$ jest jedna z półpłaszczyzn wyznaczonych przez l_1.

Sprawdzamy którą: bierzemy punkt testowy $(0,0)$ i podstawiamy do $0 + 3\cdot 0 = 0 < 1{,}5$

Zatem jest ta, która zawiera $(0,0)$

Podobnie:

l_2: $x_1+3x_2=9$

$x_1=0 \quad x_2=3 \quad B_1(0,3)$

$x_2=0 \quad x_1=9 \quad B_2(9,0)$

Wybieramy odpowiednią półpłaszczyznę:

$(0,0) \longrightarrow x_1+3x_2 \geq 9$

$0+0=0$

Zatem nie spełnia! Wygląda jak na rys.

Proszę dokończyć!

PPL – postać analityczna, macierzowa i kanoniczna.

Na przykładach Zad 2 & 3 Lista 1.

Zad 3 (Lista 1).

Mamy:

$$\mathbb{R}^4 \supset D \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 14x_4 \to \min$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ \begin{cases} 4x_1 + 4x_3 + 5x_4 \geq 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 180 \end{cases} \end{cases}$$

Stwierdzenia

1) mamy PPL w postaci STANDARDOWEJ. Dopiero stąd mamy postać ANALITYCZNĄ, sprowadzić do macierzowej (!)

2) $m = 2$, $n = 4$.

3) ustalamy kolejność zm. decyzyjnych, n. (x_1, x_2, x_3, x_4) i zapisujemy w postaci macierzy:

$\bar{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^t \in M_{4\times 1}$

4) zachowując dalej tę kolejność i kolejno

(i) zapisuję $\bar{F}$ w postaci macierzowej

$F(\bar{x}) = \bar{c}\,\bar{x}$, gdzie

$\bar{c} = [12, 9, 16, 14]$,

czyli

$D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \mathrm{Min}$

(ii) to samo dla W.O. i W.D.

$\bar{x} \in \bar{D} \iff \bar{x} \geqslant \bar{0}$, $\bar{0} = [0,0,0,0]^t$

oraz

$G\bar{x} \geqslant \bar{b}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 120 \\ 180 \end{bmatrix} \in M_{2\times 1}$

$G = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 4}$

Konwersja P.M. $\to$ P.A. (PPL).
na przykładzie zad 2 (Lista 1)

Mamy:

$$D \ni \bar{x} \longrightarrow A\bar{x} \to \max$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}, \quad G\bar{x} \leq \bar{b}, \text{ gdzie}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad A = [2, 3, 4, 1]$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Z postaci G: $m = 2$, $n = 4$

Zmienne decyzyjne: (x_1, x_2, x_3, x_4).
Dla tego P.A. będą wyglądały następująco:

$$\mathbb{R}^4 \supset D \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow F(x_1, x_2, x_3, x_4) :=$$

$$= [2, 3, 4, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = [2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4]$$

$$= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \longrightarrow \max$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in D \iff$$

$$(\bar{x} \geq \bar{0}) \iff x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$(G\bar{x} \leq \bar{b}) \iff \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}} \underset{4\times 2}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 \leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 15 \end{cases}$$