Kurs: Badania Operacyjne
Forma zajęć: Ćwiczenia #2
Tryb: On-line.

Temat. PPL i jego rozwiązanie. Przykłady modelowania.

Wprowadzenie

Zapiszmy PPL typu $m \times n$, gdy w postaci macierzowej mamy:

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \mathrm{Max}$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \geq \bar{0} \ \&, \ \bar{c} \in M_{1 \times n}$$

$$G\bar{x} \leq \bar{b}, \text{ gdzie } G \in M_{m \times n}, \ \bar{b} \in M_{m \times 1}$$

lub

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \mathrm{Min}$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \ \& \ G\bar{x} \geq \bar{b}, \ \bar{c}, G, \bar{b} \text{ j.w.}$$

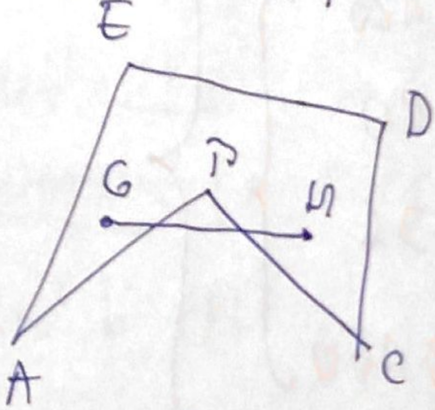
Z ogólnej teorii wiadomo, że jeśli $D \neq \emptyset$ i ograniczony, to PPL ma co najmniej jedno rozwiązanie $\bar{x}_0 \in D$, czyli a) przypadek Max, b) przypadek Min

$$\forall_{\bar{x} \in D} \ \bar{c}\bar{x} \leq \bar{c}\bar{x}_0 \qquad \bar{c}\bar{x} \geq \bar{c}\bar{x}_0.$$

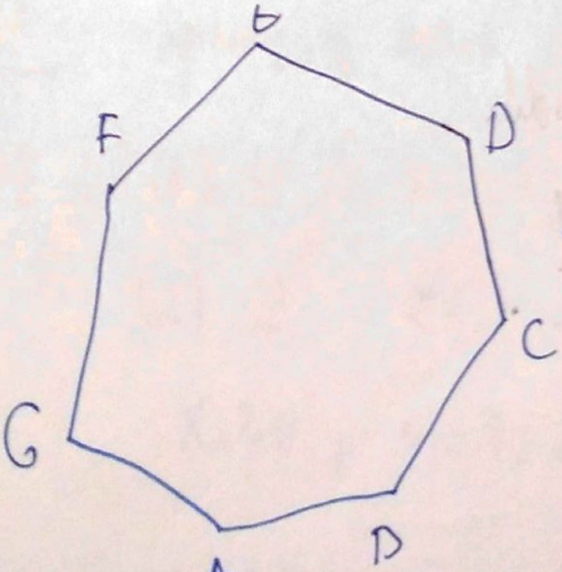
Zajmiemy się przypadkiem szczególnym, tj. $\underline{\underline{n=2}}$, $m \geq 2$.
Wtedy, jeśli $D \neq \emptyset$ i D ograniczone, to D jest <u>wielokątem</u> wypukłym i rozwiązanie PPL jest jednym z wierzchołków tego wielokąta (tzw. SIMPLEX).

<u>Uwaga</u>.

Nie każdy wielokąt jest wypukły



<u>Nie</u> jest (odcinek GH nie jest zawarty we wnętrzu)



wielokąt wypukły.

Problem #1.

Dane jest PPL

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x_1, x_2) \longrightarrow F(x_1,x_2) := x_1 + x_2 \to \max$$

$$\Updownarrow \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 \ge 0, \quad 0 \le x_2 \le 4000 \\ \text{oraz} \quad \left.\begin{array}{l} (1)\ 6x_1 + 6x_2 \le 36000 \\ (2)\ 10x_1 + 5x_2 \le 50000 \end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

(i) Narysować ZRD i na tej podstawie orzec czy PPL jest niesprzeczne ($\equiv D \neq \emptyset$ i ograniczone)

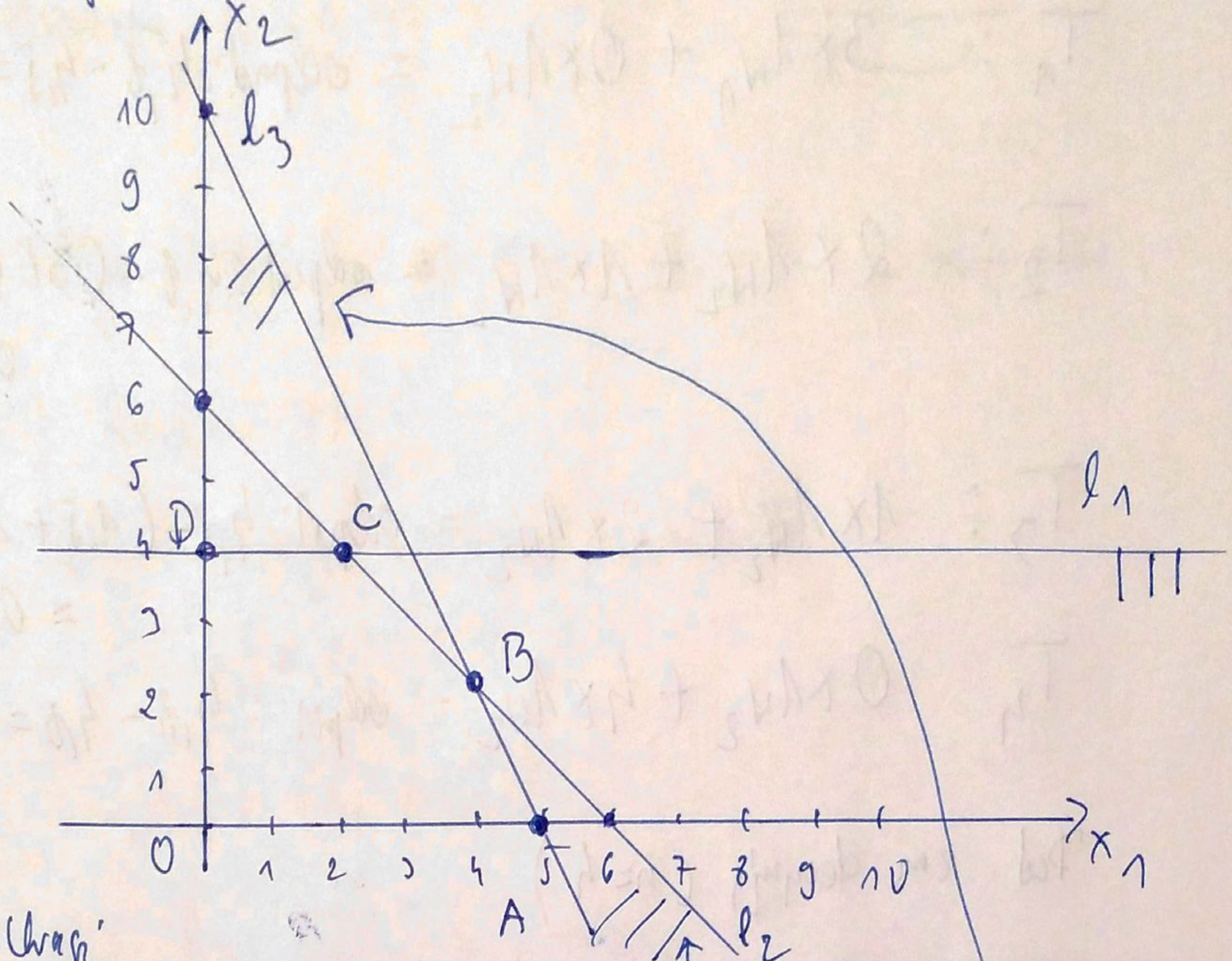
(ii) Rozwiązać to PPL.

Krok 1. Sprawdzamy, czy można uprościć podane nierówności:

$$\text{TAK:} \quad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (1) \equiv \quad x_1 + x_2 \le 6000 \\ (2) \equiv \quad 2x_1 + x_2 \le 10000 \end{array}\right\} \\ x_1 \ge 0, \quad 0 \le x_2 \le 4000 \end{array}\right\} (*)$$

Krok 2. W układzie współrzędnych $x_1 O x_2$, po odpowiednim wyborze jednostki metodą geometr. rozwiązujemy układ $(*)$.

1 jedn = 1000



Uwagi

1) Warunki brzegowe pokazują, iż D leży w I ćwiartce

l_1: $x_2 = 4000$ (4 jedn)

$0 \le x_2 \le 4000$ → pas ogr. $x_2 = 4000$ i $x_2 = 0$

l_2: $x_1 + x_2 = 6000$

Ponieważ $(0,0)$ spełnia $x_1 + x_2 \le 6000$, rozw. (w I ćwiartce) p.

l_3: $2x_1 + x_2 = 10000$

$(0,0)$ spełnia $2x_1 + x_2 \le 10000$, zatem

Rozwiązaniem WD & WO jest wielokąt $\underbrace{OABCD}_{=D}$.

Zatem $D \neq \emptyset$ i ograniczony, i stąd PPL jest niesprzeczne.

2) Rozwiązać PPL:

(i) wyznaczamy współrzędne wierzchołków

$O = (0,0)$

$\{A\} = \{x_2 = 0\} \cap l_3$

$$\left.\begin{array}{l} l_3:\ 2x_1 + x_2 = 10000 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x_1 = 5000}$$

$$\boxed{A = (5000, 0)}$$

$\{B\} = l_3 \cap l_2$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 6000 \\ 2x_1 + x_2 = 10000 \end{array}\right\}$$

$x_1 = 4000$

$x_2 = 2000$

$$\boxed{B = (4000, 2000)}$$

$$\{C\} = l_1 \cap l_2 \qquad \left.\begin{array}{l} x_2 = 4000 \\ x_1 + x_2 = 6000 \end{array}\right\} \quad x_1 = 2000$$

$$C = (2000, 4000)$$

$$\{D\} = \{x_1 = 0\} \cap l_1$$

$$D = (0, 4000)$$

Mamy skończony zbiór (wsp. wierzchołka)

$$W = \{ \underset{O}{\underset{\parallel}{(0,0)}}, \underset{A}{\underset{\parallel}{(5000,0)}}, \underset{B}{\underset{\parallel}{(4000, 2000)}}, \underset{C}{\underset{\parallel}{(2000, 4000)}},$$

$$\underset{D}{\underset{\parallel}{(0, 4000)}} \}.$$

(ii) Bierzemy zbiór

$$F(W) = \{ \underset{0}{F(O)}, \underset{5000}{\underset{\parallel}{F(A)}}, \underset{6000}{F(B)}, \underset{6000}{\underset{\parallel}{F(C)}}, \underset{4000}{\underset{\parallel}{F(D)}} \}$$

Porównując kryterium przy MAX, mamy <u>2-rozw.: B lub C</u>

Problem 2. (Zad 4, lista 2)

Zaproponować model i rozwiązać go.

Krok 1. Identyfikacja przypadku

Problem DIETY

Krok 2. Def. zm. decyzyjne i agregacja parametrów

P_j - j-ty produkt $(j=1,2)$, $n=2$

$|P_1| = x$ - # jedn P_1

$|P_2| = y$ - # jedn. P_2

S_i - i-ty składnik, gdzie

$S_1 = A$, $S_2 = D$, $S_3 = C$, $S_4 = E$ $(m=4)$

c_j - cena jedn. zakupu P_j, $j = 1, 2$

Skł. \ Prod.	P_1	P_2	Dzienn
S_1	6	3	≥ 120 & ≤ 240
S_2	1	3	≥ 60
S_3	9	1	≥ 36
S_4	6	6	≥ 180
	1,2	1,8	

Krok 3. Model

typ $m \times n = 4 \times 2$

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,y) \longrightarrow F(x,y) = 1{,}2x + 1{,}8y \to Min$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ \left.\begin{array}{l} 240 \geq 6x + 3y \geq 120 \\ x + 2y \geq 60 \\ 5x + y \geq 36 \\ 6x + 6y \geq 180 \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

Krok 4. Řešení modelu

Prosím dokončit!

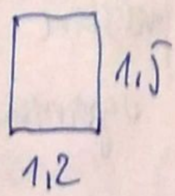
Problem 3 (zad 5 lista 2)

Model + rozwiązanie .

K1 . Identyfikacja : Problem doboru TECHNOLOGII = PROBLEM WYKROJU

K2 . Zaczynamy od def. wyrobów. Na tej podstawie zdefiniujemy TECHNOLOGIE .

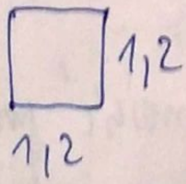
W_1 :



(wymiary)

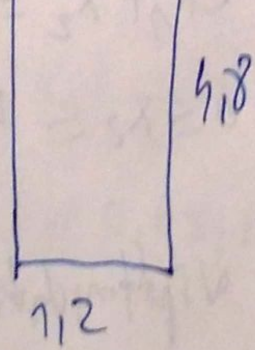
$\underline{\underline{m=2}}$

W_2 :



Definiujemy technologie - sposoby wykrawania

materiał :



T_1: $3 \times 1w_1 + 0 \times 1w_2$ = odpad: $4{,}8 - 4{,}5 = 0{,}3$

T_2: $2 \times 1w_2 + 1 \times 1w_2$ = odpad: $4{,}8 - (3 + 1{,}2) = 0{,}6$

T_3: $1 \times 1w_2 + 2 \times 1w_2$ = odpad: $4{,}8 - (1{,}5 + 2{,}4) = 0{,}9$

T_4 $0 \times 1w_2 + 4 \times 1w_2$ = odpad: $4{,}8 - 4{,}8 = 0$.

Def. zm. decyzyjn. ($n = 4$)

$x_j = |T_j|$ – # cięć metodą T_j, $j = 1,2,3,4$

c_j – odpad jedn. odpow. T_j, $j =$ – „ –

FC:

$$\mathbb{R}^4 \supset D \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}9x_3 + 0 \cdot x_4 \to \min$$

Parametry modelu

wyrób \ tech.	T_1	T_2	T_3	T_4	zam.
W_1	3	2	1	0	600
W_2	0	1	2	4	200
odpad	0,3	0,6	0,9	0	

W.B. $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

W.O.

$$\left.\begin{array}{ll} W_1: & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 600 \\ W_2: & x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 200 \end{array}\right\}$$

Uwaga. Przypadek $n=4$ zmienne, a metoda geom. nie zadziała.

Problem 4

Zad 6 listy 2: zbudować model oraz rozw. go metodą geometryczną.

Problem 5

Weźmy PPL $m \times n$ dane w postaci macierzowej

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \max$$

$$(*) \qquad \Updownarrow \quad \bar{x} \geq \bar{0} \ \& \ G\bar{x} \leq \bar{b}, \quad \bar{x} = [x_1, x_2 .., x_n]^t.$$

Definiujmy nowe: $n \times m$, gdzie

$$(**) \quad \mathbb{R}^m \supset \tilde{D} \ni \bar{y} \longrightarrow \bar{b}^t \bar{y} \to \min$$

$$\Updownarrow \quad \bar{y} \geq \bar{0}, \quad G^t \bar{y} \geq \bar{c}^t, \quad \bar{y} = [y_1, y_2 .. y_m]^t.$$

Niech $(*)$ ma postać analityczną

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni (x, y, z) \longrightarrow F(x, y, z) = x + 3z \to \max$$

$$\Updownarrow \quad x, y, z \geq 0 \ \& \ \left.\begin{array}{l} -x + y + z \leq 1 \\ x - 2y + z \leq 2 \end{array}\right\}.$$

Napisać postać analityczną dla $(**)$.