Kurs: BO

Forma: Ćwiczenia #3

Tryb: Online

Temat. Zjawisko dualności: słaba i mocna zasada dualności (SZD, MZD)

Problem 1. (wykorzystanie MZD)

Dany jest program (PPL)

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow 3x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20 \end{cases} \quad \& \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Rozwiąż go.

Z założenia (PPL) jest typu 2x3. Oznacza to, iż nie rozwiążemy go metodą geometryczną. Zastosujemy metodę pośrednią – skorzystamy z MZD von Neumanna.

Przypomnienie:

jeśli dany jest PPL $m \times n$

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \max$$

(I) $\bar{x} \geq \bar{0}$ & $G\bar{x} \leq \bar{b}$,

to bierzemy dualny

$n \times m$, $\bar{y} = [y_1, \dots, y_m]^t$

$$\mathbb{R}^m \supset \tilde{D} \ni \bar{y} \longrightarrow \bar{b}^t\bar{y} \to \min$$

(II) $\bar{y} \geq \bar{0}$ & $G^t\bar{y} \geq \bar{c}^t$

Z MZD mamy:

PPL ma rozw. $\Leftrightarrow$ DPPL ma rozw., gdy

$$\exists\ \bar{x}_0 \in D,\ \bar{y}_0 \in \tilde{D}$$

$$\forall \bar{x} \in D\ \ \bar{c}\bar{x} \leq \bar{c}\bar{x}_0 \ \ \& \ \ \forall \bar{y} \in \tilde{D}\ \ \bar{b}^t\bar{y} \geq \bar{b}^t\bar{y}_0$$

oraz $\underline{\bar{c}\bar{x}_0 = \bar{b}^t\bar{y}_0}$

Ponadto, wyznaczając $\bar{y}_0$ mamy wspomóc konstrukcję $\bar{x}_0$, co pokażmy na dwóch przykładach.

Przebieg procedury

Krok 1: konstrukcja DUALNEGO

a) postać macierzowa pierwotnego

$$\bar{x} = [x_1, x_2, x_3]^t$$

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \max$$

$$\Updownarrow \quad \bar{x} \geq \bar{0} \ \& \ G\bar{x} \leq \bar{b}$$

$$\bar{c} = [3, -1, 2], \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) postać macierzowa dualnego

$$\bar{y} = [y_1, y_2]^t$$

$$\mathbb{R}^2 \supset \bar{D} \ni \bar{y} \longrightarrow \bar{b}^t\bar{y} \to \min$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{y} \geq \bar{0} \ \& \ G^t\bar{y} \geq \bar{c}^t, \quad G^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1/2 & 3 \end{bmatrix}$$

c) postać analityczna dualnego

$$\overset{?}{R} \supset \tilde{D} + (y_1, y_2) \longrightarrow 4y_1 + 20y_2 \to \text{Min}$$

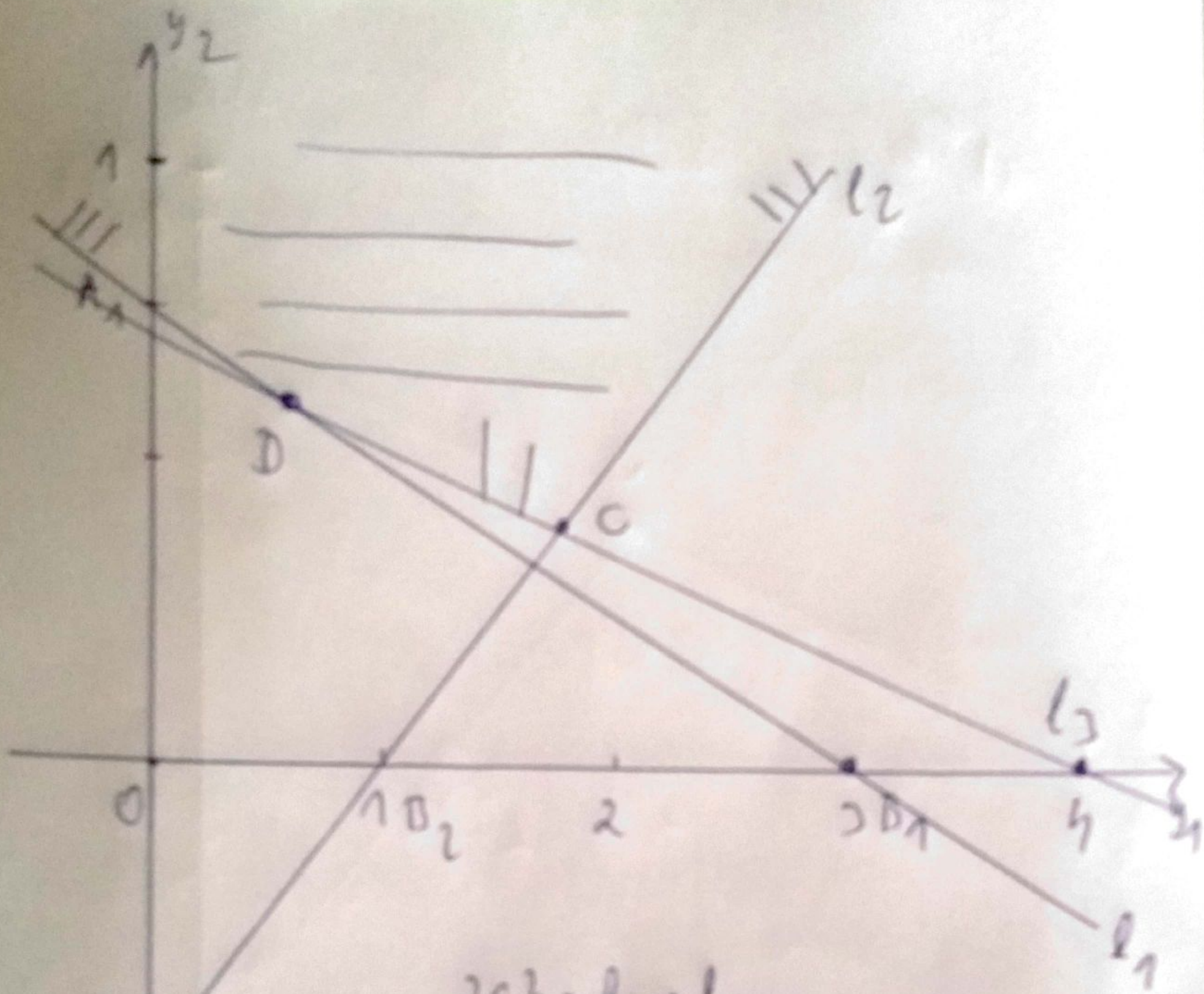
$$\Downarrow$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 + 4y_2 \geq 3 \\ -y_1 + 2y_2 \geq -1 \\ \frac{1}{2}y_1 + 3y_2 \geq 2 \end{array}\right\}$$

	A_1	B_1
l_1	$(0, \frac{3}{4})$,	$(3, 0)$
	A_2	B_2
l_2	$(0, -\frac{1}{2})$,	$(1, 0)$
	A_3	B_3
l_3	$(0, \frac{2}{3})$	$(4, 0)$

Krok 2. Rozw. dualnego (metoda geometr.).



$\{C\} = l_3 \cap l_2$

$$\left.\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 &= -1 \\ y_1 + 6y_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_2 &= 3/8 \\ y_1 &= 7/4 \end{aligned}$$

$C\left(7/4, 3/8\right)$

$\{D\} = l_3 \cap l_1$ $\quad \left.\begin{aligned} y_1 + 4y_2 &= 3 \\ y_1 + 6y_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \mid (-1)$

$\underline{D\left(1, 1/2\right)}$

Rozwiązaniem $\tilde{D}$ jest <u>otwarty</u> sympleks

A_1DC, gdzie wierzchołki mają <u>wsp.</u>

$A_1(0, 3/4)$, $D(1, 1/2)$, $C(7/4, 3/8)$.

Wstawmy wsp. do funkcji celu

$$\tilde{F}(y_1, y_2) = 4y_1 + 20y_2 \to \min$$

$$\tilde{F}(A_1) = 20 \cdot 3/4 = 15$$

$$\tilde{F}(D) = 4 \cdot 1 + 20 \cdot 1/2 = 14$$

$$\tilde{F}(C) = 4 \cdot 7/4 + 20 \cdot 3/8 = 7 + \frac{15}{2} > 14$$

Stąd $\bar{y}_0 \Rightarrow \min\{\tilde{F}(A_1), \tilde{F}(D), \tilde{F}(C)\}$

$= \tilde{F}(D)$, zatem

$\underline{\bar{y}_0 = D}$ $\quad \tilde{F}(D) = \underline{14}$

<u>Krok 7</u>. Rozwiąż. p. pierwotnego – MZD.

Z MZD.

(i) $\exists\, \bar{x}_0 \in D$, że

$$\tilde{\bar{F}}(\bar{x}_0) = \tilde{F}(\bar{y}_0) = 14$$

(ii) Z ogólnej teorii $\bar{x}_0$ leży na brzegu sympleksu, co oznacza, że dla $\bar{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ mamy

$$\left.\begin{aligned} x_1^0 - x_2^0 + \tfrac{1}{2}x_3^0 &= 4 \\ 4x_1^0 + 2x_2^0 + 3x_3^0 &= 20 \end{aligned}\right\}$$ (pojawiają się relacje „=").

(iii) MZD pozwala wyrugować jedną niewiadomą.

W tym celu:

Biorę kolejne warunki ograniczające dla dualnego ~~C(6, 3/2)~~ | ~~D(...)~~
D(1, 1/2)

(1) $y_1 + 4y_2 \geq 3 \,\big|_D > \quad x_1^0 = \begin{matrix} ? \\ 1 \end{matrix}$

(2) $-y_1 + 2y_2 \geq -1 \,\big|_D = \quad x_2^0 = 0$

(3) $1/2\, y_1 + 3y_2 \geq 2 \,\big|_D = \quad x_3^0 \; ?$

i sprawdzę, czy rozw. optym. $\bar{y_0} = C$ spełnia warunek „>" lub „="!
Jeśli „>" to odp. $x_j^0 = 0$, jeśli „="
to szukam (?)

Dlatego $x_2^0 = 0$ i układ ma postać

$$\begin{cases} x_1^0 + \frac{1}{2} x_3^0 = 4 \quad / \cdot (-4) \\ 4x_1^0 + 3x_3^0 = 20 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4x_1^0 - 2x_3^0 = -16 \\ 4x_1^0 + 3x_3^0 = 20 \end{array}\right\}$$

$$x_3^0 = 4$$

$$x_1^0 = 2$$

$$\bar{x}_0 = (2, 0, 4)$$

$$F(\bar{x}_0) = 3 \cdot (+2) - 0 + 2 \cdot 4 = 14$$

$$= \tilde{F}(\bar{y}_0),$$

co potwierdza tw.

Problem 2 (zastosowanie S2D)

Weźmy PPL jak w problemie 1.
Uzasadnić, że

$$\forall_{(x_1,x_2,x_3)\in D} \quad F(x_1,x_2,x_3) \leq 16.$$

Rozw.: Skorzystamy z S2D

$$\forall_{\substack{(x_1,x_2,x_3)\in D \\ (y_1,y_2)\in \tilde{D}}} \quad F(x_1,x_2,x_3) \leq \tilde{F}(y_1,y_2),$$

gdzie $\tilde{F}$ FC p. dualnego.

Z rozw. Problemu 1 mamy:

$$\tilde{F}(y_1,y_2) = 4y_1 + 20y_2 \to \min$$

$$(y_1,y_2)\in\tilde{D} \iff \left.\begin{array}{l} y_1,y_2 \geq 0 \\ y_1+4y_2 \geq 3 \\ -y_1+2y_2 \geq -1 \\ \frac{1}{2}y_1+3y_2 \geq 2 \end{array}\right\}$$

Zatem, że

$(-1,1) \in \widehat{D}$, i dlatego

$$\forall_{(x_1,x_2,x_3) \in D} \quad F(x_1,x_2,x_3) \le F(-1,1) = -4+20 = 16$$