Kurs BO

Forma: Ćwiczenia

Tryb: Online

Temat. Rozwiązanie PPL metodą MZD von Neumanna. OZT i ZZT.

Problem 1.

Spółdzielnia produkująca przybory szkolne otrzymuje z fabryki papier bele o szerokości 2,1 m oraz 4,2 m. W swojej produkcji wykorzystuje arkusze o szerokości 0,5 m i 1,4 m.
Wykonanie miesięcznego planu produkcji wymaga zużycia 12 000 m papieru o szerokości 0,5 m oraz 18 000 m papieru o szerokości 1,4 m.
Jak należy pociąć otrzymane z fabryki papieru bele, aby odpad powstały przy cięciu był jak najmniejszy? Jaka będzie wtedy wielkość odpadu?

1 Identyfikacja problemu

Z treści wynika, że jest to PROBLEM ROZKROJU - WYBORU TECHNOLOGII.

2. Ustalenie zmiennych decyzyjnych i wymiarów PPL.

Aby ustalić $m \times n$, i $T_1, T_2 .., T_n$, zidentyfikujmy najpierw wyroby:

Z treści wynika, że $m=2$.

Niech

W_1 – wałek o wym. 0,5 m

W_2 – wałek o wym. 1,4 m.

Z treści wynika, że W_1, W_2 wytwarzamy się z różnych bel. Dlatego technologie zdefiniujemy w oparciu o W_1, W_2 i parametry tych bel.

	Bela 2,1		Bela 4,2			
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
W_1	4	1	8	5	2	0
W_2	0	1	0	1	2	3
odpad	0,1 2,1	0,2	0,2	0,3 4,2	0,4	0

(2)

Dlatego $n = 6$ i PPL ma wymiar 2×6.

Start

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$x_j = |T_j|$, $j = 1, 2 \ldots 6$ – # cięć metodą T_j.

3. Agregujemy dane (parametry)

Wyroby	Sposób cięć						Limit [m]
	bela 2,1		bela 4,2				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	
W_1	4	1	8	5	2	0	12000
W_2	0	1	0	1	2	3	18000
odpad [m]	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0	

4°. Model.

$$\mathbb{R}^6 \supset D \ni (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \longrightarrow F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \longrightarrow Min,$$

gdzie $F(x_1,\ldots,x_6)$ – łączny odpad

j-ty odpad cząstkowy

$c_j x_j$, gdzie

$$[c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6] = [0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0]$$

Dlatego

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}4x_5$$

$(x_1,\ldots,x_6) \in D \Leftrightarrow$

$x_1,\ldots,x_6 \geq 0$

$$4x_1 + x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 2x_5 \geq 12000$$

$$x_2 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \geq 18000$$

5°. Rozwiąż PPL.

Ponieważ mamy 2×6, skorzystamy z MZD.

a) sprowadź do postaci dualnej.

Mamy $\bar{x} = [x_1, \dots, x_6]^t \in M_{6 \times 1}$

$$\mathbb{R}^6 \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \min$$

(I)

$\bar{x} \geq \bar{0}$ & $G\bar{x} \geq \bar{b}$, gdzie

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = [0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0]$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 12000 \\ 18000 \end{bmatrix}$$

PD: 6×2

$$\bar{y} = [y_1, y_2]^t \in M_{2\times 1}$$

$$\mathbb{R}^2 \supseteq \tilde{D} \ni \bar{y} \longrightarrow \bar{b}^t \bar{y} \to \mathrm{Max}$$

$$(1) \quad \bar{y} \geq \bar{0} \quad \& \quad G^t \bar{y} \leq \bar{c}^t$$

Pomeni

$$G^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 8 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^t = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

zato v postavi analitični PD na postavi:

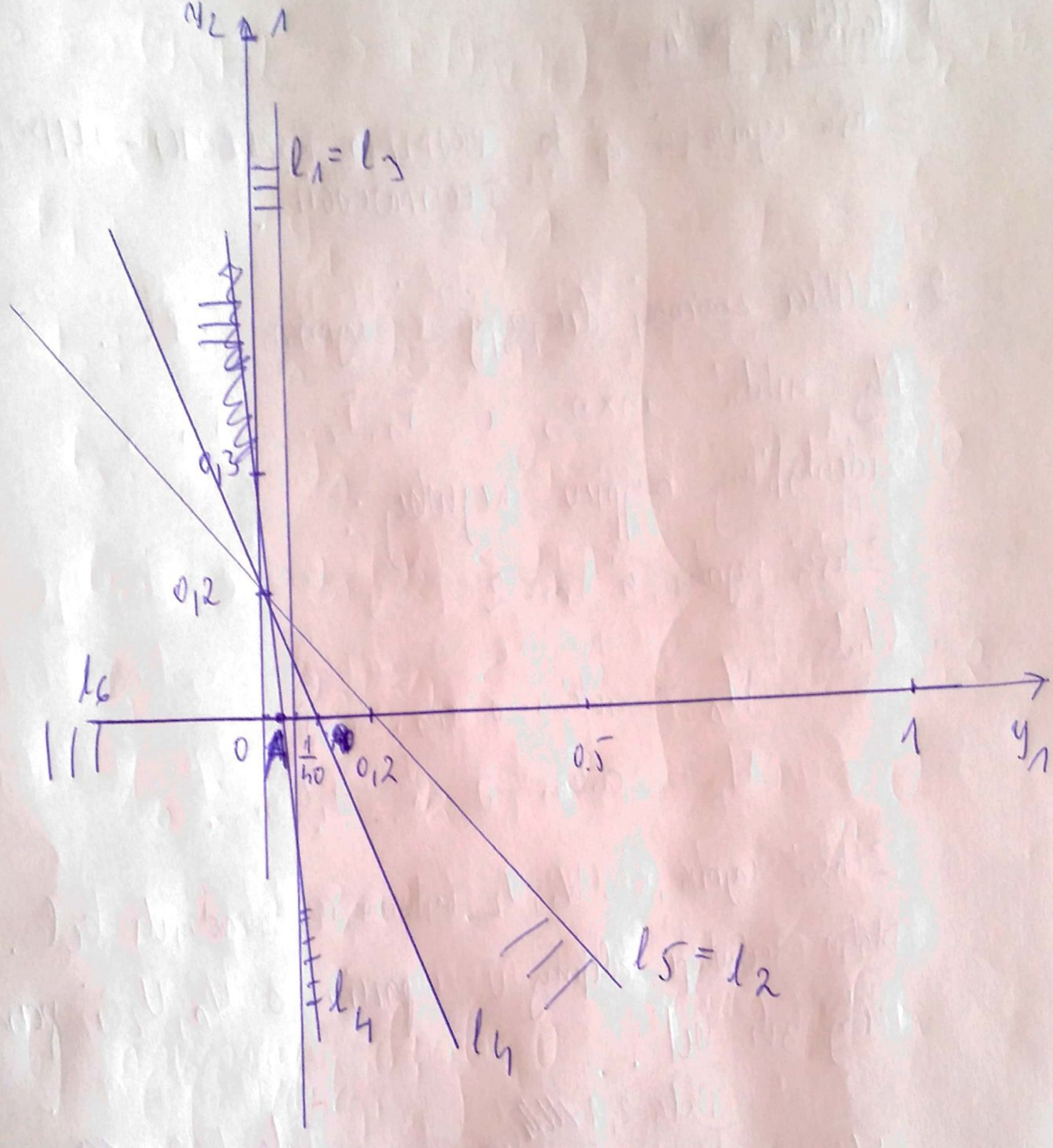
$$\mathbb{R}^2 \supset \tilde{D} \ni (y_1, y_2) \longrightarrow \tilde{F}(y_1, y_2) = 12000y_1 + 18000y_2 \to \max$$

(II)

$$\left.\begin{array}{ll}
l_1: & 4y_1 \leq 0{,}1 \\
l_2: & y_1 + y_2 \leq 0{,}2 \\
l_3: & 8y_1 \leq 0{,}2 \\
l_4: & 5y_1 + y_2 \leq 0{,}7 \\
l_5: & 2y_1 + 2y_2 \leq 0{,}4 \\
l_6: & 3y_2 \leq 0
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\iff y_1 \leq \frac{1}{40} \\
\\
\iff y_1 \leq \frac{1}{40} \\
\\
\iff y_1 + y_2 \leq 0{,}2 \\
\iff y_2 \leq 0
\end{array}$$

$$y_1, y_2 \geq 0 .$$

b) rozwiązanie dualnego - metoda graficzna (po redukcji!)



Sympleksem jest odcinek OA, gdzie

$A\left(\frac{1}{40}, 0\right)$

Dlatego

$$\bar{y}_0 = \left[\frac{1}{40}, 0\right] \in \tilde{D} \text{ i jest rozw.}$$

optymalnym.

$$\tilde{F}(\bar{y}_0) = 12000 \cdot \frac{1}{40} + 0 \cdot 18.000 = \underline{300}.$$

c) MZD $\longrightarrow$ rozw. PPL.

	War. ogr. dla duala	Wynik	Czynności
x_1^0	$4y_1^0 = 0,1$	„="	Liczymy
x_2^0	$y_1^0 + y_2^0 = \frac{1}{40} < 0,2$	„<"	0
x_3^0	$8y_1^0 = 0,2$	„="	Liczymy
x_4^0	$5\frac{1}{40} + 0 < 0,3$	„<"	0
x_5^0	$2\frac{1}{40} + 0 < 0,4$	„<"	0
x_6^0	$y_2^0 = 0 = 0$	„="	Licz.

$$\begin{cases} 4x_1^0 + x_2^0 + 8x_3^0 + 5x_4^0 + 2x_5^0 = 12000 \\ x_2^0 + x_4^0 + 2x_5^0 + 3x_6^0 = 18.000 \end{cases}$$

9

Dlatego $x_2^0 = x_4^0 = x_5^0 = 0$

oraz

$$\left.\begin{array}{r} 4x_1^0 + 8x_3^0 = 12000 \\ 3x_6^0 = 18.000 \end{array}\right\}$$

$x_6^0 = 6000$ oraz

$$x_1^0 + 2x_3^0 = 3000$$

$$x_1^0, x_3^0 \geq 0$$

Zatem

$$\overline{x}_0 = [3000 - 2x_3^0, 0, x_3^0, 0, 0, 6000]^+,$$

gdzie $0 \leq x_3^0 \leq 3000$

Zatem mamy „∞" decyzji optymalnych!

Sprawdzenie: $F(\overline{x}_0) = 0,1(3000 - 2x_3^0) + 0,2x_3^0$

$= 300 - 0,2x_3^0 + 0,2x_3^0 = 300 = \tilde{F}(\tilde{y}_0)$

Problem 2.

Planowana jest budowa 1-3 zakładów mleczarskich mających zaopatrywać w masło 4 miejscowości: P, R, S i T. Zakłady mogą powstać w miejscowościach P, R lub S. Dzienne zdolności produkcyjne zakładów A_i, zapotrzebowanie miast na masło B_j (kg) oraz oznaczone przyjęte jednostkowe koszty produkcji h_i i przewozu masła c_{ij} (zł za kg) podano niżej

c_{ij}	P	R	S	T	A_i	h_i
P	0	0,4	0,5	1	3000	4
R	1	0	0,8	0,6	2000	4,5
S	0,5	0,5	0	0,8	2500	4,2
B_j	1000	2000	1000	1000	7500 / 5000	

Zaproponować lokalizację zakładów, które zapewniają minimalne koszty tej transakcji..

Aby rozw. taki przedstawiony problem, najpierw traktujemy go jako klasyczne zagadnienie transportu.

Ponieważ $\sum A_i = 7500 > \sum D_j = 5000$, to to OZT. Dlatego należy go domknąć.

Wprowadzamy „fikcyjnego" odbiorcę F
SE do nie wykorzystanych zdolności produkcji
$(7500 - 5000 = 2.500)$.

Wtedy otrzymujemy.

c_{ij}	P	R	S	T	F	A_i
P	4	4,4	4,5	5	0	3000
R	5,5	4,5	5,3	5,1	0	2000
S	4,7	4,7	4,2	5,0	0	2.500
D_j	1000	2000	1000	1000	2.500	$\geq$

Model.

x_{ij} – wielk. produkcji węgla w i-tej miejsc. dostarczona do j-tej, gdzie

x_{i5} $(i=1,2,3)$ – nie wykorzystana zdolność produkcji (NADWYŻKA).

Niech $C=[c_{ij}]_{3\times 5}$ jak w tabeli wyżej.

$$D \ni [x_{ij}]_{3\times 5} \longrightarrow f([x_{ij}]) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

(1) $x_{ij} \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} P:&\ \sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 3000 \\ R:&\ \sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 2000 \\ S:&\ \sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 2500 \end{aligned}\right\} \text{dostawy}$$

Podobnie dla odbiorców.

Zainicjujmy ZT metodą najm. el. m. kosztów

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4,4 & 4,5 & 5 & 0 \\ 5,5 & 4,5 & 5,3 & 5,1 & 0 \\ 4,7 & 4,7 & 4,2 & 5,0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0,1 & 1,1 & 0,1 & 0 \\ 0,7 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C_1$$

Konstrukcja macierzy $[x_{ij}]$

	P	R	S	T	F	
P	1000	2000		0	0	3000
R					2000	2000
S			1000	1000	500	2500
	1000	2000	1000	1000	2500	

WNIOSKI: 1°. Rozw. jest optymalne.

2°. Zakłady lokalizujemy w miejsc. P i S