Kurs: B.O. / ZiP st. stacj / niest.

Forma: Wykład

Tryb: On-line

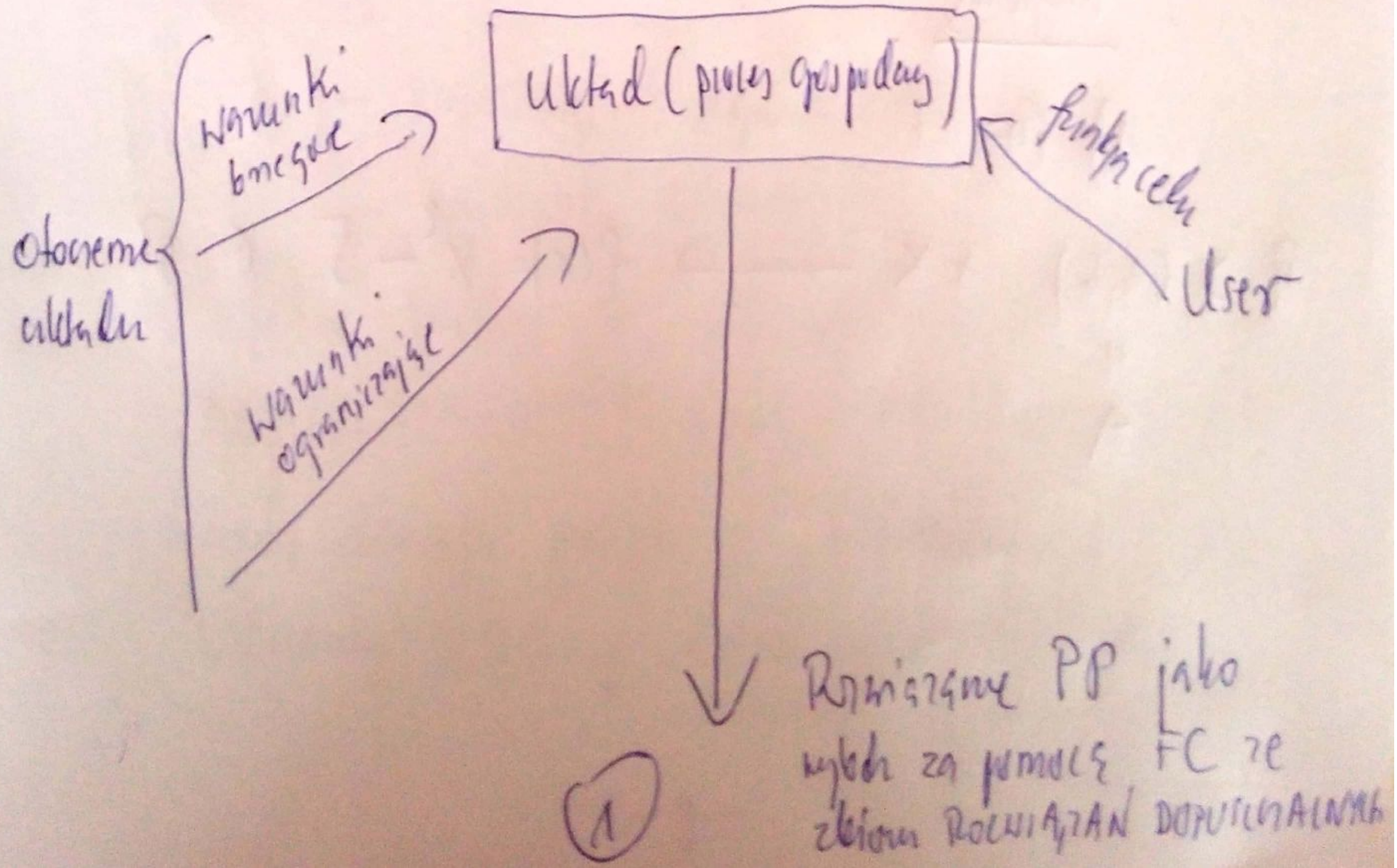
Wykład 2

Temat: Sformułowanie problemu PROGRAMOWANIA c.d.

Zajmiemy się teraz modelem teoretycznym zagadnień przedstawionych na WA oraz innych, gdzie występuje potrzeba optymalizacji. Najpierw przedstawimy to w wersji opisowej, a następnie podamy formalny opis ilościowy, czyli matematyczny.

Opis Problemu Programowania (PP)

Sytuacja przedstawia się tak jak na rys 1.



W określonym otoczeniu dany jest UKŁAD (proces gospodarczy). Procesem tym zarządza USER.

Chce osiągnąć efekt swojej działalności.

Jest tylko jeden sposób – musi relatywizować, czyli

- ~~[illegible]~~ sprecyzować CEL swojej działalności (Objective)
- uwzględniając obecność Otoczenia,

które generuje dla niego ograniczenia (ang. constrains)

- warunki brzegowe
- warunki ograniczające.

W efekcie powstaje tzw. ZBIÓR ROZWIĄZAŃ DOPUSZCZALNYCH (ang. FEASIBLE REGION).

Każda decyzja podjęta na podstawie każdego elementu ZRD jest możliwa do wdrożenia

User ma swój cel w postaci FC.
Jest to kryterium, które pozwala mu wybrać z ZRD tą właściwą. W tym sensie (efekt relaksacji) jest ona optymalna.

Uwaga:

1°. Zmiana FC może spowodować, że zmieni się decyzja optymalna

2°. Zmiana WB & WO może spowodować, że ZRD ulegnie zmianie i dotychczasowe rozwiązanie w ogóle może nie być możliwe do realizacji!

Przedstawmy wyniki z wykł. 1 jeszcze raz.

<u>Niech</u>: WB - mnogość warunków <u>brzegowych</u>

WO - " - " - ograniczających

ZRD - mnogość rozwiązań dopuszczalnych

FC - f. celu

d - pojedyncza decyzja

<u>Wtedy</u>:

(i) $d \in ZRD \iff d$ spełnia WB & WO

(ii) zadajemy FC jako:

a) wartościowanie decyzji (np. wartość zysku, nakładu / kosztu)

$$ZRD \ni d \longrightarrow FC(d) \in \mathbb{R} \quad [\text{np. w PLN}]$$

b) wybór właściwej $d \in ZRD$ na podstawie przyjętego kryterium, np.

<u>kryterium</u> $FC = \max \; (\in \mathbb{R})$

Wtedy wybór polega na tym, aby z ZRD wybrać taką d_0, że

$$FC(d_0) = m_0.$$

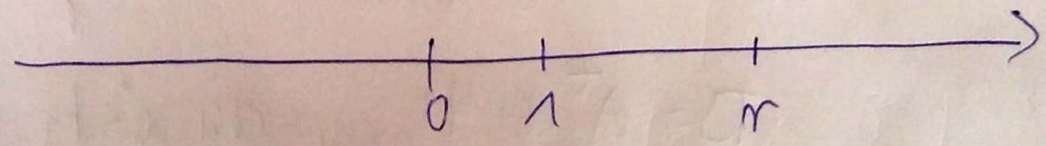
Wówczas do czynienia z omawianym zagadnieniem, które nazywamy <u>PROBLEMEM PROGRAMOWANIA</u>.

<u>Model matematyczny PP.</u>

- Niezbędne fakty z matematyki potrzebne do opisu PP.

<u>przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$</u>

Wiemy, że symbolem $\mathbb{R}$ oznaczamy zbiór l. rzeczywistych. Interpretacja geometryczna $\mathbb{R}$ — prosta



$r \in \mathbb{R}$

Jest to przykład tzw. p. <u>euklidesowej</u> wymiaru $n=1$, co oznaczamy $\mathbb{R}^1$.

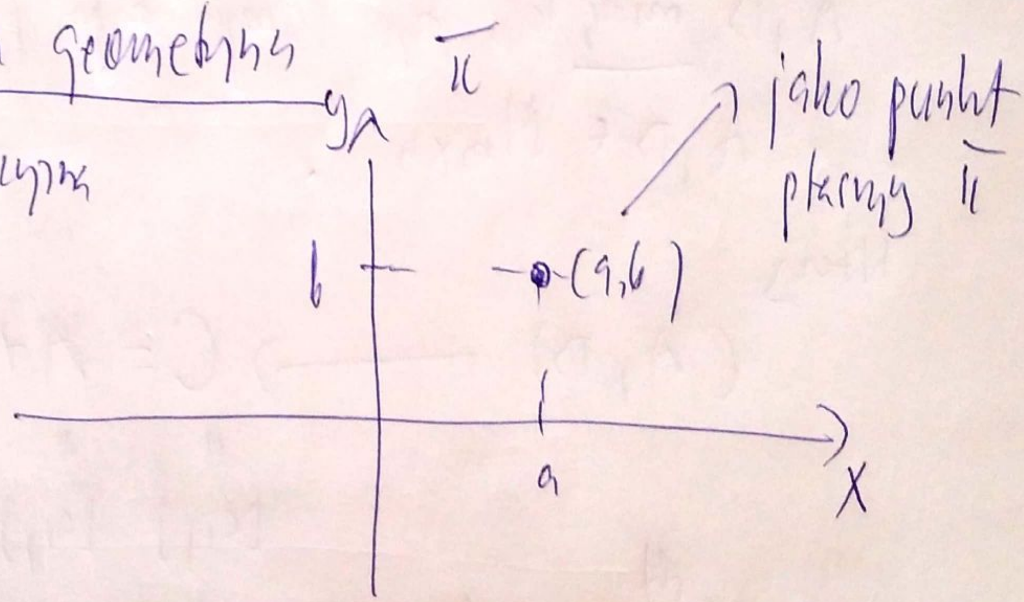
<u>Przypadek $n=2$</u>

$$\mathbb{R}^2 \overset{df}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Wtedy elementami zbioru $\mathbb{R}^2$ są <u>pary</u> l. rzeczywistych (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$.

<u>Ilustracja geometryczna</u>

Płaszczyzna

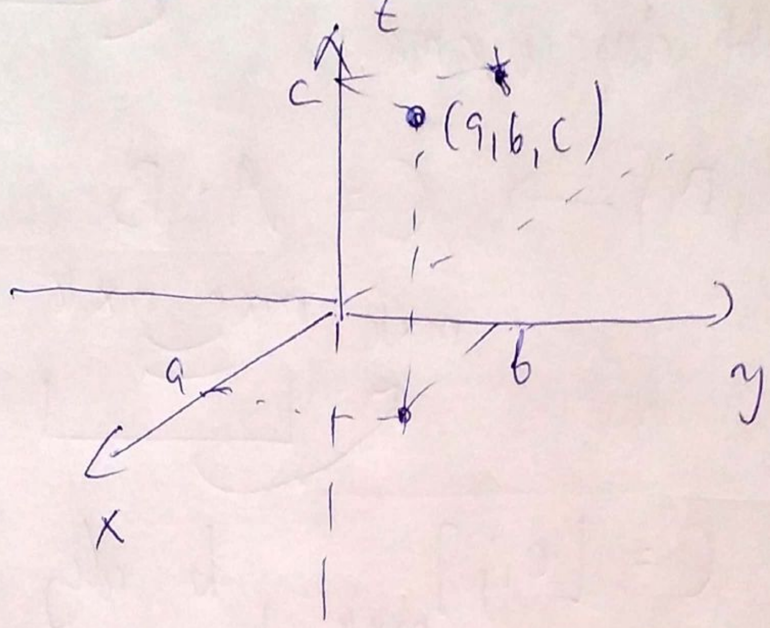


Weźmy jeszcze przypadek $n=3$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (\text{długość, szerokość, wysokość})$$

Mamy odpowiednio: $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a,b,c \in \mathbb{R}$

Model geometrii $\mathbb{R}^3$



Uogólnienie: $n \in \mathbb{N}$ - zb. l. naturalnych

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$x_j \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ ciąg l. rzeczyw. długości n

Będziemy też pisali $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Funkcja rzeczywista wielu zmiennych.

f.r. to przyporządkowanie f określone na podzbiorze $A \subset \mathbb{R}^n$, które każdemu $\bar{a} \in A$ <u>przypisuje</u> dokładnie jedną liczbę rzeczywistą $f(\bar{a}) \in \mathbb{R}$ nazywaną <u>wartością</u> f w pkt. $\bar{a}$.

Czyli

$$\mathbb{R}^n \supset A \ni \bar{a} \longrightarrow f(\bar{a}) \in \mathbb{R}$$

$\bar{a}$ - argument f

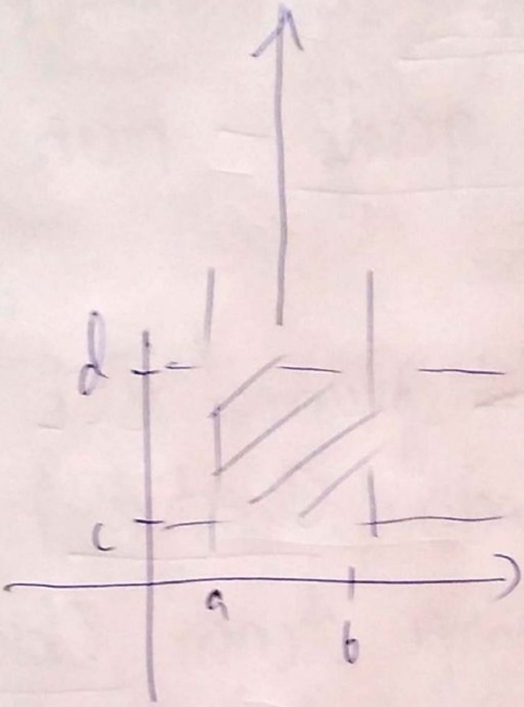
<u>Przykłady</u>.

1) $(n=1)$

$$\underset{\substack{\parallel \\ A}}{\mathbb{R} \supset (a,b)} \ni x \longrightarrow f(x) = x^2 - 5 \in \mathbb{R}$$

2) $n=2$

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \supset (a,b)\times(c,d) \ni (x,y) \longrightarrow f(x,y) = x-y \in \mathbb{R}$$



3) $n=3$

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \supset (a,b)\times(c,d)\times(e,g) \ni (x,y,z) \longrightarrow$$

$$f(x,y,z) = xyz \in \mathbb{R}^2$$

Zjawisko liniowości

W PP ważny jest efekt występowania funkcji liniowych.

Def. Powiemy, że funkcja f,

$$\mathbb{R}^n \supset A \ni \bar{x} = (x_1, x_2, .., x_n) \longrightarrow f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

jest liniowa, jeśli

$$f(\bar{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + .. + a_n x_n,$$

gdzie liczby $a_1, a_2, .., a_n$ są dane.

Nazywamy je współczynnikami f.

Przykłady.

$n=1$ $\quad f(x) = ax \quad$ (np. $f(x) = 2x$)

| wykres linia prosta.

$n=2$ $\quad f(x,y) = ax + by \quad$ (np. $f(x,y) = x + y$)

$n=3$

$$f(x,y,z)=ax+by+cz$$

(np. $f(x,y,z)=-x+2y$ $(c=0)!$)

Zapis macierzowy f. liniowej.

Przez macierz A typu $m\times n$ (m,n l. naturalne) rozumiemy obiekt

wiersz

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie}$$

$a_{ij}\in\mathbb{R}$ kolumna

Piszemy $A=[a_{ij}]$

miniaturka

Przykłady $[a]$ $n=m=1$, $a\in\mathbb{R}$

$[1\ 2\ 3]$ $m=1$, $n=3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad m=n=3$$

Jeśli $n=m$, to mówimy, że A jest <u>kwadratowa</u>.

Będziemy pisali $A \in M_{m\times n}$ – zbiór wszystkich macierzy typu $m\times n$

Jeśli $m=1$, to mówimy, że A jest <u>typu wiersz</u>

$$A=[a_1\ a_2\ \dots\ a_n]$$

Jeśli $n=1$, to A typu <u>kolumna</u>

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

<u>Operacje na macierzach</u>

① transpozycja (zamiana wierszy na kolumny)

Niech $A\in M_{m\times n}$. Wtedy

$B=A^t\in M_{n\times m}$ oraz i-ty wiersz macierzy B jest i-tą kolumną A.

Przykłady:

$$[a]^t = [a] \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[a \ b]^t = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^t = [a, b]$$

Jasne, że $(A^t)^t = A$.

② Dodawanie macierzy

A, B muszą być tego samego typu, tj.

$A, B \in M_{m \times n}$.

Wtedy

$$(A, B) \longrightarrow C = A + B \in M_{m \times n}$$

$$C = [c_{ij}], \quad A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}]$$

$$c_{ij} \overset{df}{=} a_{ij} + b_{ij}$$

Przykłady:

$$[a] + [b] = [a + b]$$

$[1 \ 2 \ 3] + [3 \ 4]$ Nie wykonalne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) Mnożenie macierzy

Efekt dopasowania:

$$(A, B) \longrightarrow \underset{m\times k}{C} = \underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B}$$

Jeśli $C = [c_{ij}]_{m\times k}$, to aby obliczyć c_{ij} należy:

(i) z A wybrać i-ty wiersz

$a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in}$

z B j-tą kolumnę

$$\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix}$$

Oba ciągi mają tę samą długość

Wtedy $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

Przykłady

$$\underset{1\times 1}{[a]}\,\underset{1\times 1}{[b]} = \underset{1\times 1}{[ab]}$$

$$\underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}} = \underset{1\times 1}{\begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 3\cdot 5 \end{bmatrix}} = \underset{1\times 1}{\begin{bmatrix} 19 \end{bmatrix}}$$

Weźmy teraz funkcję liniową

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow f(\bar{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Zapiszmy ją w konwencji macierzowej

W tym celu definiujemy 3 macierze

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in M_{1\times n}$$

$$\bar{x}^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{1\times n}{\bar{a} = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]}$$

Wtedy $f(\bar{x}) = \underset{1\times n}{\bar{a}}\ \underset{n\times 1}{\bar{x}^t} = \underset{1\times 1}{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right]}$ //