**Kurs:** B.O. (Zip st. stacj. & niest.)

**Forma zajęć:** wykład

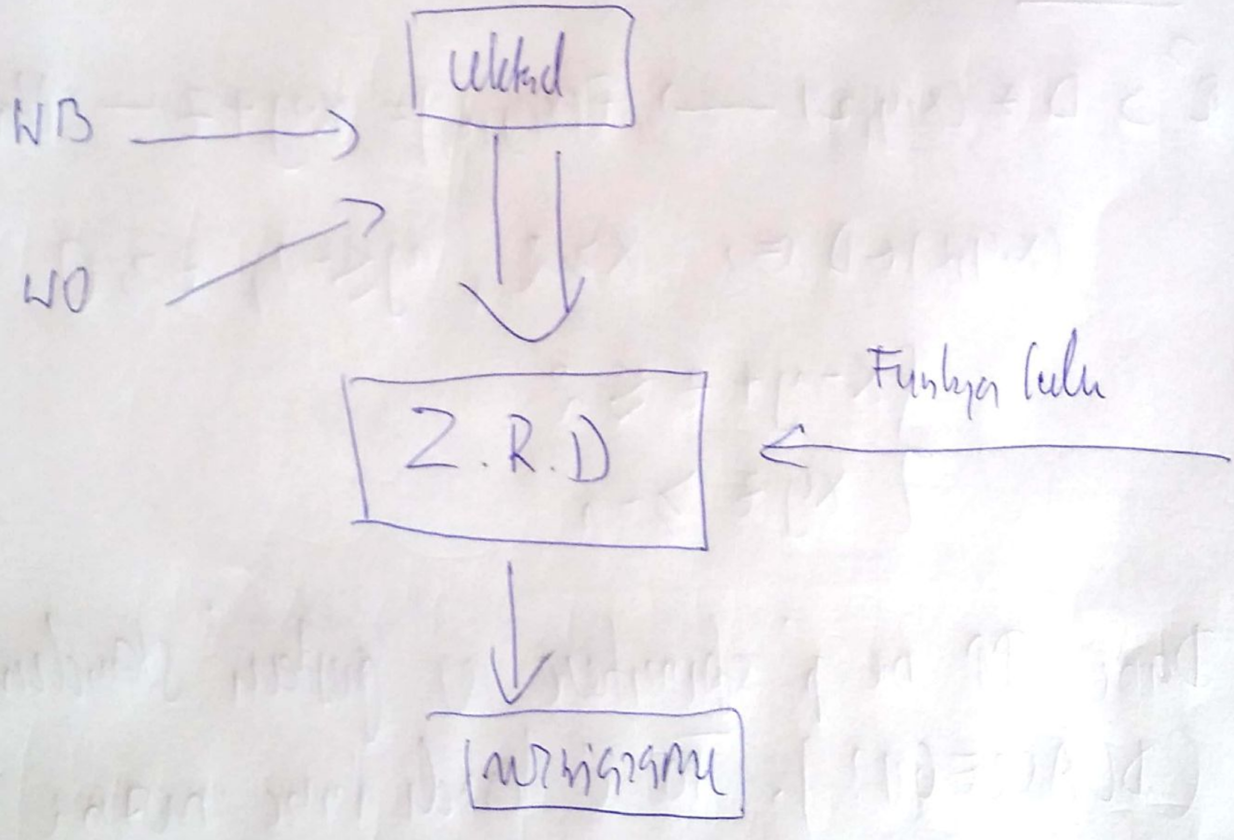
**tryb:** on-line

## Wykład 3

**Temat:** Postać matematyczna Problemu Programowania (PP).

(PPL) - problem programowania liniowego.

Jak wiadomo zjawisko PP wygląda następująco



Podamy teraz opis ilościowy PP, czyli jego model matematyczny

W tym celu ustalmy dane liczby naturalne, $m, n \geq 2$

FAKT (o postaci PP)

Każde PP ma swój model, którego podstawowym parametrem jest jego typ: $m \times n$, gdzie

$n$ – liczba argumentów funkcji celu

$m$ – liczba warunków ograniczających, gdzie

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{F \text{ (f. celu)}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

zmienne decyzyjne

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m_0$ – kryterium wyboru

$m_0 \in \mathbb{R}$ – dana liczba

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \iff$

zbiór rozw. dopuszczalnych

(i) N.B. $x_j \in I_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$

$I_j$ – przedziały liczbowe

(ii) N.O.

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, .., x_n)\, R_1\, b_1 \\ g_2(x_1, x_2, .., x_n)\, R_2\, b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, .., x_n)\, R_m\, b_m \end{cases},$$

gdzie $b_1, b_2, .., b_m$ dane liczby rzeczywiste,

$R_1, R_2, .., R_m$ jedna z relacji „$\leq$”, „$\geq$”.

Przykład 1.

$m=2$, $n=3$, czyli kpm $2\times 3$.

Wtedy oznaczmy $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni (x,y,z) \longrightarrow F(x,y,z) = xy+z$$

$$F(x,y,z) = 5$$

$$(x,y,z)\in D \iff \left.\begin{matrix} x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \\ \text{i} \\ \left.\begin{matrix} x+y+z \geq 1 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 2 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}$$

3

## Punkt 2

$m = n = 2$, czyli $2 \times 2$

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,y) \longrightarrow F(x,y) = x+y$$

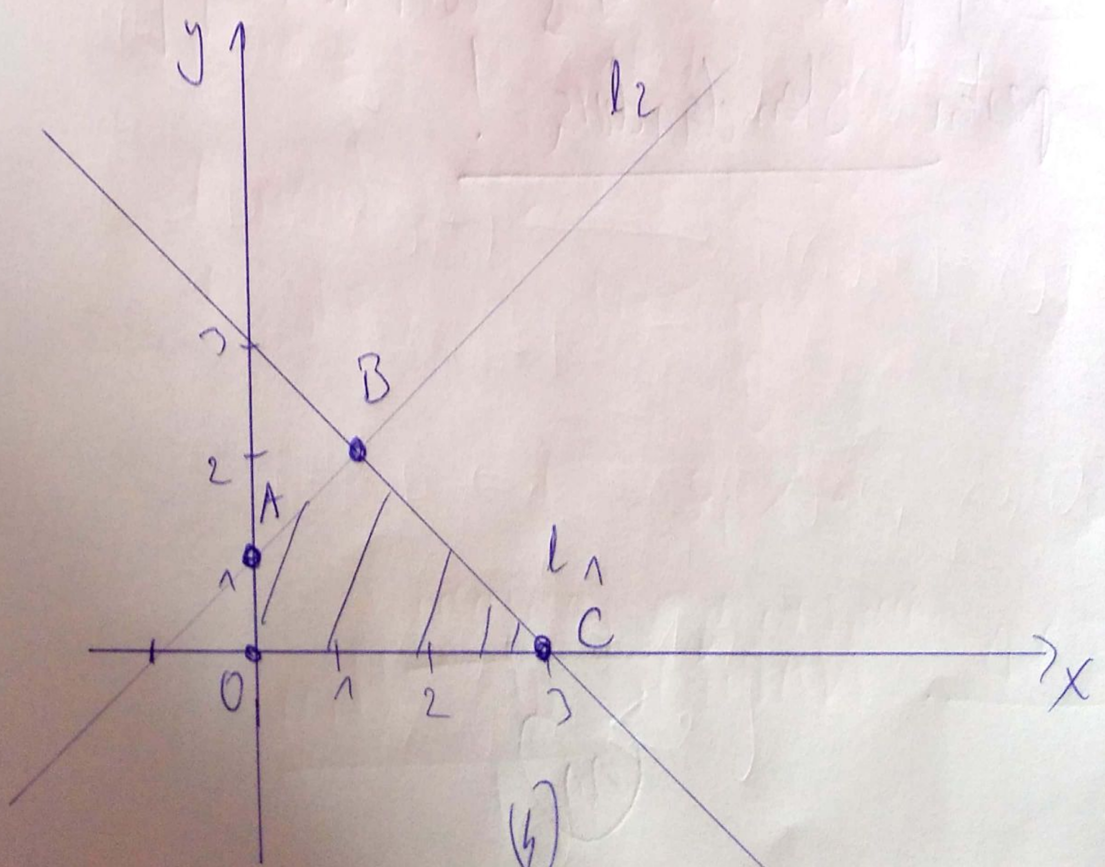
$$F(x,y) = 1$$

$(x,y) \in D \Leftrightarrow \quad x \geq 0, \; y \geq 0$

i

$$\begin{aligned} x+y &\leq 3 \; \} \; l_1 \\ -x+y &\leq 1 \; \} \; l_2 \end{aligned}$$

Zauważ, że w tym przypadku można to zilustrować geometrycznie (rys. 1)




(4)

## ZAD1.

Trzeba uzasadnić, że ZRD to obszar zakreskowany ograniczony wielokątem $W_{OABC}$

Każdy punkt $P=(x,y) \in W_{OABC}$ jest decyzją którą można zrealizować, bowiem należy do obszaru wygenerowanego przez WD i WO.

Rozwiązać PP oznacza wybrać z $W_{OABC}$ taki punkt $P_0=(x_0,y_0)$, że

$$F(P_0)=1$$

Z rys. 1 widać, że taki $P_0$ istnieje.

## ZAD2.

Wskazać rozwiązanie PP z P.2

Dalej będą rozważane tylko dwie następujące sytuacje.

# PP tipa max

$m \times n$

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to MAX$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \\ \left.\begin{array}{l} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) \leq b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq b_m \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

gde $F(x_1, \ldots, x_n) \to MAX$ označava, i

su [illegible] tako $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$, i

$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \quad F(x_1, \ldots, x_n) \leq F(x_1^0, \ldots, x_n^0)$

najveća između mogućih vrednosti F-C.

[illegible] pisati $F(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \max_D F$

PP typu min

$m \times n$

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to MIN$$

$$\Updownarrow$$

i

$$\left.\begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \left.\begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) \geq b_1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) \geq b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \geq b_m \end{array}\right\} \end{array}\right\},$$

gdy $F(x_1, \dots, x_n) \to Min$ oznacza, że

szukamy $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$, że

$$\forall_{(x_1, \dots, x_n) \in D} \quad F(x_1, \dots, x_n) \geq F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

najmn. z możliwych wartości

Piszemy też $F(x_1^0 \dots x_n^0) = \min_D F$.

Uwaga

Oba powyższe modele podane są w tzw. postaci standardowej. W problemach tych tylko $\leq$ nie musi. Wyjaśnia to kolejny przykład.

P.2

Dane PP sprowadzić do postaci standardowej

2x3

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni (x,y,z) \longrightarrow F(x,y,z) = x\cdot y + z \longrightarrow \text{Max}$$

$$(x,y,z) \in D \iff x \geq 2,\ y \leq -1,\ z \geq 0$$

$$\begin{cases} x - y + z \leq 2 \\ xyz \geq -1 \end{cases}$$

Dane PP nie jest sformułowane w postaci standardowej (DLACZEGO?). To i każde inne można zawsze sprowadzić do P.S.

Pokażmy jak to się robi.

(i) ustalmy typ: MAX / MIN.

U nas MAX.

(ii) WO sprowadzamy do standardu:

$x \geq 2 \iff \underbrace{x-2}_{= \tilde{x}} \geq 0$, $y \leq -1 \iff$

$y+1 \leq 0 \iff$

$\underbrace{-(y+1)}_{= \tilde{y}} \geq 0$

$\underbrace{z}_{= \tilde{z}} \geq 0$

i wprowadzamy nowe zmienne (j.w.)

Mamy $\tilde{x} = x-2$

$\tilde{y} = -y-1$

$\tilde{z} = z$

(iii) przeprowadźmy procedurę ZAMIANY ZMIENNYCH w oryginalnym PP:

$\tilde{R} \to \tilde{D} \to (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \longrightarrow \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \to$ MAX

gdzie

$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = F(2+\tilde{x}, -\tilde{y}-1, \tilde{z}) =$

$= (2+\tilde{x})\cdot(-\tilde{y}-1) + \tilde{z}$

WD: $\tilde{x} \geq 0$, $\tilde{y} \geq 0$ $\tilde{z} \geq 0$ (standardowe)

WO: Najpierw ustawmy właściwe nierówności (jak MAX, to „$\leq$")

$x - y + z \leq 2$ (dobrze)

$xyz \geq -1$ (źle!)

$\Downarrow$

$-xyz \leq 1$

i zamieńmy zmienne!

(10)

WD: $$\left.\begin{aligned} (\tilde{x}+2) - (-\tilde{y}-1) + \tilde{z} &\le 2 \\ -(\tilde{x}+2)(-\tilde{y}-1)\tilde{z} &\le 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z} &\le -1 \\ (\tilde{x}+2)(\tilde{y}+1)\tilde{z} &\le 1 \end{aligned}\right\}$$

Úvaha:

Další pro PP když vznikli její postaví standardní !

## Przypadek PP liniowego (PPL)

Niech dane będzie (PP) typu $m \times n$,
np. z kryterium MAX (dla MIN sytuacja
będzie analogiczna).

$$\mathbb{R}^m \supset D \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow F(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow MAX$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \\ \left.\begin{array}{l} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq b_m \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

**Def** (PPL)

Powiemy, że PP jest typu PPL, gdy
wszystkie funkcje: $F, g_1, \ldots, g_m$ są liniowe.

**ZAD.** NAPISAĆ dla Min

FAKT (O postaci analitycznej PPL)

Każdy PPL typu $m \times n$ (dla MAX) ma postać

$R^n \supset D \ni (x_1, x_2, .., x_n) \longrightarrow F(x_1, x_2 .. x_n)$

$$F(x_1, x_2 .. x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + .. + a_n x_n \longrightarrow MAX$$

$$\begin{cases} x_1, .., x_n \geq 0 \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + .. + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + .. + a_{2n} x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + .. + a_{mn} x_n \leq b_m \end{cases}$$

ZAD 3. Napisać dla MN

P) $3 \times 3$

$\mathbb{R}^3 \supset D \ni (x,y,z) \longrightarrow -x + y + 0z \longrightarrow \text{Max}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ -x + y + 2z \leq 5 \\ y - z \leq 1 \\ x + y + z \leq 3 \end{cases}$$

ZAD 4 Napisać wartości współczynników

$c_j$, $a_{ij}$, $b_j$.