Kurs: Badania Operacyjne (ZiP st. stacj./niest.)

Forma zajęć: Wykład

Tryb: on-line

W1.

Temat. Postać macierzowa PPL i jej konwersja.
Metodologia modelowania zjawisk prowadzących do PPL

Według PPL typu $m \times n$ dane w postaci analitycznej i standardowej, czyli:

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni (x_1, x_2 \ldots, x_n) \longrightarrow F(x_1, x_2 \ldots, x_n) \longrightarrow Max$$

$$F(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1, x_2 \ldots, x_n \geq 0$$

oraz

$$\left.\begin{array}{l} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \ldots + g_{1n}x_n \leq b_1 \\ g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + \ldots + g_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ g_{m1}x_1 + g_{m2}x_2 + \ldots + g_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right\}$$

Uwaga. Tutaj przedstawiony przypadek Max. Przypadek Min student zapisuje samodzielnie.

Pokażmy jak powyższą, analityczną postać „zwija" się do postaci macierzowej.

Definiujmy macierze:

- zmienne decyzyjne: $\overline{X} = [x_1, x_2 .., x_n]^t \in M_{n\times 1}$
- macierz współczynników funkcji celu F : $\overline{C} = [c_1, c_2, .., c_n] \in M_{1\times n}$
- macierz wyrazów wolnych warunków ograniczających : $\overline{b} = [b_1, b_2 .. b_m]^t \in M_{m\times 1}$
- macierz współczynników warunków ograniczających : $G = [g_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}$

Wtedy efekt „zwinięcia" wygląda następująco:

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni \overline{X} \longrightarrow F(\overline{X}) = \overline{C}\,\overline{X} \longrightarrow Max$$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{X} \geq \overline{0} \ \& \ G\overline{X} \leq \overline{b}$$ , gdzie

$$\overline{0} = [\underbrace{0, 0 .., 0}_{n\text{-razy}}]^t.$$

Powyższy zapis nazywamy postacią macierzową PPL.

Fakt 1 (o konwersji)

W każdej chwili możemy PPL

zmienić: p. analit. $\longrightarrow$ p. macierzowa

wrócić: p. macierzowa $\longrightarrow$ p. analityczna.

Wyjaśnij to na przykładzie.

Przykład 1

Dane jest PPL:

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni (x, y, z) \longrightarrow F(x, y, z) = -x + 0{,}5z \to \max$$

$$\Updownarrow$$

$x, y, z \geq 0$ oraz

$$\left.\begin{aligned} -x + y + 2z &\leq 1{,}5 \\ -y + 7z &\leq 0{,}5 \end{aligned}\right\}$$

Zmienić PPL do postaci macierzowej.

Rozwiązanie. Krok 1: Sprawdzamy, czy PPL dane jest w postaci standardowej. Jeśli nie, to sprowadzamy do takiej.

U nas TAK, zatem

Krok 2. Ustal typ: # zm. decyzyjnych: $n = 3$

# w. ogr. $m = 2$

Zatem $2 \times 3$

Krok 3. Ustal kolejność zm. decyzyjnych.

Na ogół zachowuje się dane, u nas $x, y, z$.

Krok 4. Wszystko opieramy o ustalenia Kroku 3!

(i) $\bar{x} = [x, y, z]^t$ – zm. decyzyjne

(ii) $\bar{c} = [-1; 0; 0,5]$ – wsp. f. celu F

(iii) $\bar{b} = [1,5; 0,5]^t$ – w. wolny w. ogr.

(iv) $G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, bo nie zmieniły kolejności warunków!

Krok 3. Podejte zápis maticově

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow F(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x} \to \max$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \ \& \ G\bar{x} \leq \bar{b}, \text{ kde}$$

máme: $\bar{x}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{G}$ j.v.

Proto 2. Dána je ÚPL v j. maticový

$$\mathbb{R}^4 \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow F(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x} \to \max$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \ \& \ G\bar{x} \leq \bar{b}, \text{ kde}$$

$$\bar{c} = [1; 2; 3; 4]$$

$$\bar{b} = [3, 2, 1]^t, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podejte j. analyticky.

Z zadania $m=3$, $n=4$ $(3\times 4)$

Niech $\bar{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^t$, zadanie

$$\mathbb{R}^4 \supset D \ni (x_1,x_2,x_3,x_4) \longrightarrow F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \;\Downarrow\; \max$$

$\Updownarrow$

$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$ oraz

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &\leq 3\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4 &\leq 2\\ -x_1+x_2-x_3+x_4 &\leq 1 \end{aligned}\right\}$$

//

Zajmijmy się teraz procesem modelowania zjawisk prowadzących do PPL

(I) Wybór asortymentu wolumenu produkcji.

1) Identyfikacja typu: $m$ – # środków produkcji

$n$ – # wyrobów (zm. decyzyjne!),

gdzie: $W_1, W_2, \dots, W_n$ – wyroby

$S_1, S_2, \dots, S_m$ – limity środków produkcji.

2) definicja zmiennych decyzyjnych: $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\forall_{1 \le j \le n} \quad x_j = |W_j| \quad (= \# \text{ ilość jedn. wyrobu } W_j)$$

3) definicja wzoru funkcji celu $F$:

niech $c_j$ – cena jednostkowa wyrobu $W_j$

Wtedy: $c_j x_j$ – przychód ze sprzedaży $x_j$ jedn. $W_j$

$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ – łączny przychód ze sprzedaży.

Dlatego

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow Max$$

4) definicja dziedziny f. celu – ZRD:

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \iff x_1, \dots, x_n \geq 0$

ORAZ. warunki ograniczające dla kolejnych środk. produkcji:

$S_1$: $a_{1j}$ – zużycie $S_1$ na jednostkę $W_j$

$a_{1j} x_j$ – zużycie $S_1$ na $x_j$ jedn. $W_j$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ – zużycie $S_1$ na produkcję $(x_1, \ldots, x_n)$

Ale limit $S_1$ wynosi $b_1$, zatem

$$\left.\begin{aligned}
S_1&: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
S_2&: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\vdots \\
S_m&: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m
\end{aligned}\right\}$$

Przykład.

Bierzemy dane z W1:

1) $W_1, W_2$ wyroby $(n=2)$

$S_1 = \mathrm{I}$, $S_2 = \mathrm{II}$ $(m=2)$

2) $x = |W_1|$, $y = |W_2|$

3) $c_1 = 30$, $c_2 = 40$

$$F(x,y) = 30x + 40y \to \max$$

4| $(x,y) \in D \iff$
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ \text{ogr. } x \leq 3000 \\ \quad y \leq 4000 \\ \text{ogr. } \frac{x}{y} = 3/2 \end{array}\right\}$$

<u>ogr.</u>:

$$\left.\begin{array}{l} 16x + 24y \leq 96.000 \\ 16x + 10y \leq 80.000 \end{array}\right\}$$

<u>Uwaga</u>. Aby zadanie to sprawnie dobrze jest dokonać AGREGACJI PARAMETRÓW. W tym przypadku wygląda to następująco

(i) $m=2$, $n=2$, $\bar{x} = (x,y)$

(ii)

| str. \ wyrób | $W_1$ (x) | $W_2$ (y) | Limit |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | 16 | 24 | 96.000 |
| $S_2$ | 16 | 10 | 80.000 |
| cena j. | 30 | 40 | |

## II Problem mieszanki (diety)

1) Ident. typu: $m$ - # składników produktów

$n$ - # produktów (zm. decyzyjne),

gdzie: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ - produkty dające mieszankę

$S_1, S_2, \ldots, S_m$ - składniki decydujące o jakości mieszanki.

2) def zm. decyzyjnych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\forall_{1 \le j \le n} \quad x_j = |P_j| \quad (= \text{\# jedn. } j\text{-tego produktu } P_j)$$

3) def. kryterium F.C. $F$:

$c_j$ - cena jedn. zakupu $P_j$

$c_j x_j$ - wydatek na zakup $P_j$

$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ - łączny wydatek

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{Min}.$$

4) def. dziedz $F$: (ZPD)

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \Leftrightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

Ogr: warunki ogr. na zawartość składni $S_1 \ldots S_m$ w mieszaninie (DIETA)

$S_1$: $g_{1j}$ - zawartość $S_1$ w jedn. $P_j$

$g_{1j} x_j$ - zawartość $S_1$ w $x_j$ jedn $P_j$

$g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \ldots + g_{1n}x_n$ - zawartość $S_1$ w mieszaninie.

Limit $b_1$, skąd

$$\left.\begin{array}{l} S_1: g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \ldots + g_{1n}x_n \geq b_1 \\ S_2: g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + \ldots + g_{2n}x_n \geq b_2 \\ \vdots \\ S_m: g_{m1}x_1 + g_{m2}x_2 + \ldots + g_{mn}x_n \geq b_m \end{array}\right\}$$

Przykład (z W1)

1) Produkty $n=2$ $(P_1, P_2)$

składniki $m=3$ $(S_1, S_2, S_3)$

2) zm. decyzyjne

$x = |P_1|$, $y = |P_2|$

$(x, y)$

3) Agregacja parametrów

| skł \ wyrób | $P_1$ | $P_2$ | limit |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | 3 | 9 | 27 |
| $S_2$ | 8 | 4 | 32 |
| $S_3$ | 12 | 3 | 36 |
| cena jedn | 6 | 9 | |

Dalej:

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,y) \longrightarrow F(x,y) = 6x + 9y \to \max$$

$(x,y) \in D \iff$

$x, y \geq 0$ &

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 9y \geq 27 \\ 8x + 4y \geq 32 \\ 12x + 3y \geq 36 \end{array}\right\}$$