Kurs: B.O.
Forma zajęć: Wykład
Tryb: On-line

-W6-

<u>Temat</u>. Programowanie dualne. Mocna i Słaba Zasada Dualności von Neumanna. Interpretacja zmiennych dualnych.

Punktem wyjścia będzie PPL dane w postaci standardowej typu $m \times n$ z funkcją celu zorientowaną na Max (przypadek Min omówimy w uwagach) postaci:

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni (x_1, x_2 .., x_n) \longrightarrow F(x_1, x_2 .., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Max$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &W.O.: \quad x_1, x_2 .., x_n \geq 0 \\ &W.B.: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \end{aligned}\right\}$$

Dalej będziemy nazywali je Pierwotnym PPL (PPPL)

Algorytm sprowadzenia PPPL do postaci dualnego PPL (DPPL).

Krok 1.

Postać analityczną „zwijamy" do postaci macierzowej

$$\bar{x} = [x_1, x_2 .., x_n]^t$$

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \text{Max}$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \quad \& \quad G\bar{x} \leq \bar{b}, \text{ gdzie}$$

$$\bar{G} = [g_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}, \quad \bar{b} = [b_1, b_2 .. b_m]^t.$$

Krok 2.

Bierzemy PPL:

typ: $n \times m$

wektor decyzyjny:

$$\bar{y} = [y_1, ..., y_m]^t$$

Funkcja celu

$$\mathbb{R}^m \supset \tilde{D} \ni \bar{y} \longrightarrow \bar{b}^t\bar{y} \to \underline{\underline{\text{Min}}}$$

$\bar{y} \in \tilde{D} \iff$

W.D. $\bar{y} \geq \bar{0}$

W.O. $G^t \bar{y} \geq \bar{c}^t$

Tak zdefiniowane PPL nazywamy DUALNYM do (PPL).

Krok 3. Postać macierzową DPPL „rozwijamy" do postaci analitycznej

$$\mathbb{R}^n \supset \tilde{D} \ni (y_1, y_2, \ldots, y_m) \longrightarrow \tilde{F}(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{W.O. } y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0 \\
\\
\text{W.D. } \begin{cases} g_{11} y_1 + g_{21} y_2 + \ldots + g_{m1} y_m \geq c_1 \\ g_{12} y_1 + g_{22} y_2 + \ldots + g_{m2} y_m \geq c_2 \\ \ldots \\ g_{1n} y_1 + g_{2n} y_2 + \ldots + g_{mn} y_m \geq c_n \end{cases}
\end{array}\right\}$$

Przykład. 1.

Dane PPL sprowadzić do postaci dualnej, gdzie

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni (x, y, z) \longrightarrow y - z \to Max$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x, y, z \geq 0 \\ \begin{cases} 2x + z \leq 5 \\ y - 0{,}5z \leq 7 \end{cases} \end{array}\right\}$$

Rozw.

PPL jest typu $m \times n = 2 \times 3$

Zmieńmy je do p. macierzowej !

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to Max$$

$$\Updownarrow$$

$\bar{x} \geq \bar{0}$ & $G\bar{x} \leq \bar{b}$, gdzie

$$\bar{x} = [x, y, z]^t, \quad \bar{c} = [0, 1, -1]$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Zapiszmy macierzową postać DPPL :

typ: $n \times m = 3 \times 2$

decyzja $\bar{y} = [y_1, y_2]^t$

$$\mathbb{R}^2 \supset \hat{D} \ni \bar{y} \longrightarrow \bar{b}^t \bar{y} \to \text{Min}$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{y} \geq \bar{0} \quad \& \quad \bar{G}^t \bar{y} \geq \bar{c}^t$$

Rozwińmy powyższe :

$$\mathbb{R}^2 \supset \hat{D} \ni (y_1, y_2) \longrightarrow 5y_1 + 7y_2 \to \text{Min}$$

$$\Updownarrow$$

W.D. $y_1, y_2 \geq 0$,

$$G^t \bar{y} \geq \bar{c}^t \iff \underset{\cancel{(2\times 3)}^t}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0,5 \end{bmatrix}^t} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2y_1 \\ y_2 \\ y_1 - 0,5y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\text{W.O.} \quad \left.\begin{array}{l} 2y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 1 \\ y_1 - 0,5y_2 \geq -1 \end{array}\right\}$$

//

<u>Uwagi</u>

1°. Jeśli PPPL zorientowany jest na Min, to
DPPL na MAX.

2°. Mamy sytuację

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{PPL} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \\
PPPL \arrow[r] & DPPL \arrow[dr] & \\
 & & D(\widetilde{PPL}) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
 & & PPPL \arrow[uull]
\end{tikzcd}$$

bowiem $(G^t)^t = G$ dla k. macierzy $G \in M_{m\times n}$

$$(\bar{c}^t)^t = \bar{c}, \quad (\bar{b}^t)^t = \bar{b}.$$

czyli „dualne do dualnego daje pierwotne".

Słaba i Mocna ZASADA DUALNOŚCI von Neumanna.

Słaba ZD von Neumanna:

Program. pierwotne	Programowanie dualne
$\bar{x} \to \bar{c}\bar{x} \to \max$	$\bar{y} \to \bar{b}\bar{y} \to \min$
$G\bar{x} \le \bar{b}$	$G^t\bar{y} \geq \bar{c}^t$

Weźmy dowolną decyzję $\bar{x} \in D$.

Ponieważ $\bar{c}^t \le G^t\bar{y}$, więc

$$\bar{c} \le (G^t\bar{y})^t = \bar{y}^t G \quad ((G^t)^t = G)$$

i dalej

$$\bar{c}\bar{x} \le (\bar{y}^t G)\bar{x} = \bar{y}^t (G\bar{x}) \le \bar{y}^t \bar{b} =$$

$$= (\bar{b}^t \bar{y})^t = \bar{b}^t \bar{y}$$, bowiem

$$\bar{b}^t \bar{y} \in M_{1\times 1} .$$

Co to oznacza:

dla dowolnych decyzji:

$\bar{x} \in D$ oraz $\bar{y} \in \tilde{D}$

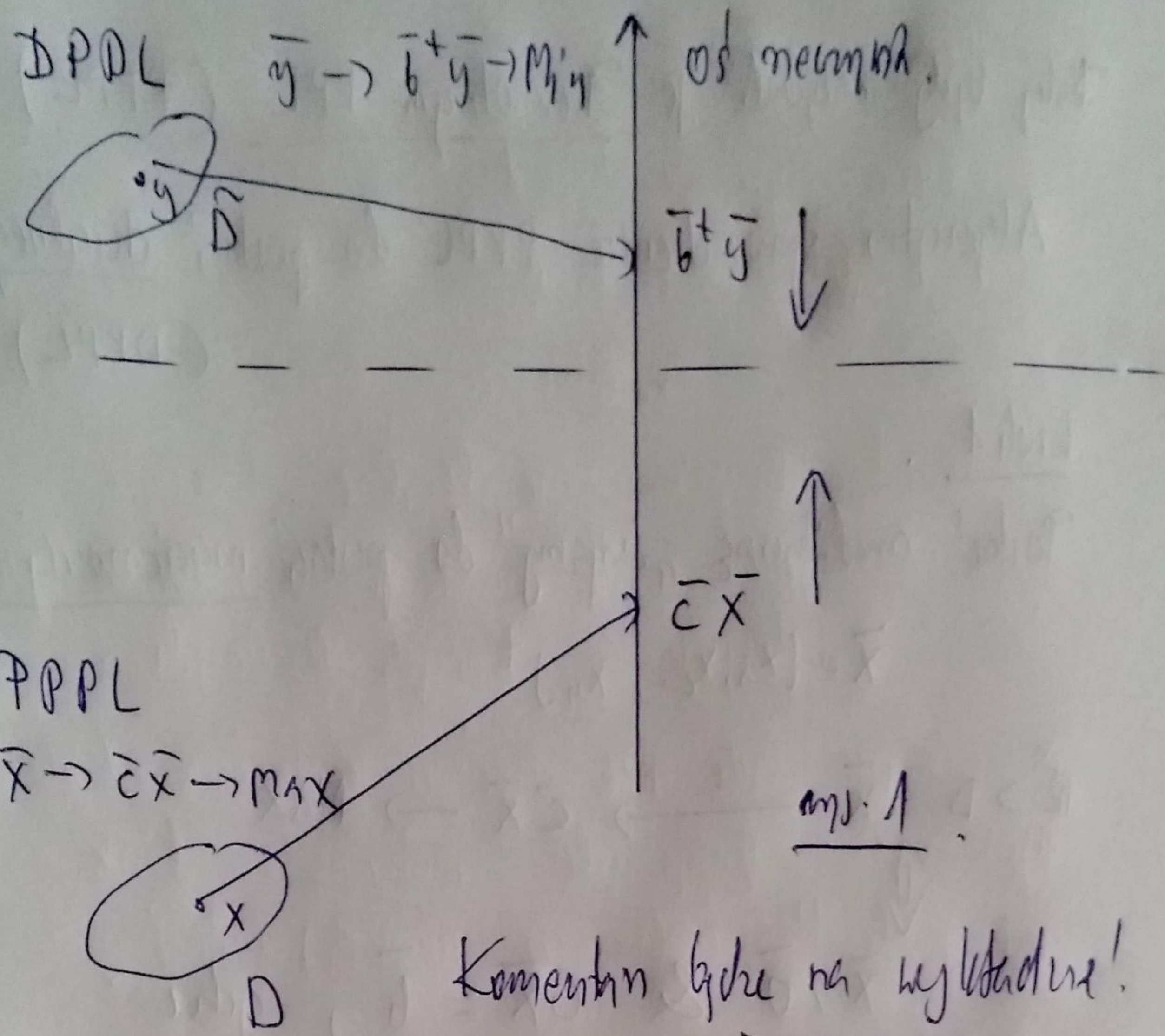
<u>zachodzi</u>

$$(*) \qquad \underset{\substack{\text{wart. f. celu}\\ \text{dla PPPL}}}{\underset{\downarrow}{\bar{c}\bar{x}}} \le \underset{\substack{\text{wartości f. celu}\\ \text{dla DPPL}}}{\underset{\downarrow}{\bar{b}^t \bar{y}}} ,$$

gdzie PPPL zorientowane na MAX

DPPL zorientowane na MIN .

Przedstawmy to graficznie:



rys. 1.

Komentarz będzie na wykładzie!

Uwaga. Linia przerywana jest „graniczna" dla obu programowań.

(*) nazywa SZD von Neumann.

P2. · Dane j programowe

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni (x_1,x_2,x_3) \longrightarrow f(x_1,x_2,x_3) = x_1+2x_2+x_3 \to \max$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} x_1+2x_2 \leq 1 \\ x_1+x_2+x_3 \leq 1 \\ x_2+2x_3 \leq 1 \end{array}\right\} \\ x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

Uzasadnić, że

$$\forall_{(x_1,x_2,x_3)\in D} \quad f(x_1,x_2,x_3) \leq 3.$$

Skorzystaj ze SZD von Neumanna.

W tym celu PPL potraktujmy jako pierwotne i wyznaczmy dualne do niego.

Dostaniemy kolejno:

PPPL 3x3

$$\mathbb{R}^3 \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \text{Max}$$

$$\shortparallel$$

$$[x_1, x_2, x_3]^t$$

$$\Updownarrow \quad \bar{x} \geq \bar{0} \ \& \ G\bar{x} \leq \bar{b}$$

DPPL 3x3

$$\mathbb{R}^3 \supset \tilde{D} \ni \bar{y} = [y_1, y_2, y_3]^t \longrightarrow \bar{b}^t\bar{y} \to \text{Min}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{y} \geq \bar{0} \ \& \ \bar{G}^t\bar{y} \geq \bar{c}^t$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \supset \tilde{D} \ni (y_1, y_2, y_3) \longrightarrow y_1 + y_2 + y_3 \to \text{Min}$$

$$\shortparallel$$

$$\tilde{F}(y_1, y_2, y_3)$$

$$\Updownarrow \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$(*) \quad \left.\begin{array}{r} y_1 + y_2 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_2 + 2y_3 \geq 1 \end{array}\right\} \text{bo } \bar{c} = [1, 2, 1]$$

Zauważmy, że $y_1 = y_2 = y_3 = 1$, czyli

$(1,1,1) \in \tilde{D}$, bo spełnia układ (*).

Dlatego, na mocy SZD:

$$\forall_{(x,y,z)\in D} \quad F(x,y,z) = x+y+z \leq \tilde{F}(1,1,1) = 1+1+1 = 3$$

//

J. von Neumann zauważył coś więcej.

MZD - Mocna Zasada Dualności

Niech dane będą PPPL(Max) i DPPL(Min), wtedy:

1°. Jeśli jedno z nich ma rozwiązanie, to drugie również, Czyli jeśli np.

$\exists_{\bar{x}_0 \in D}$ $\bar{c}\bar{x} \le \bar{c}\bar{x}_0$ dla każdego $\bar{x} \in D$

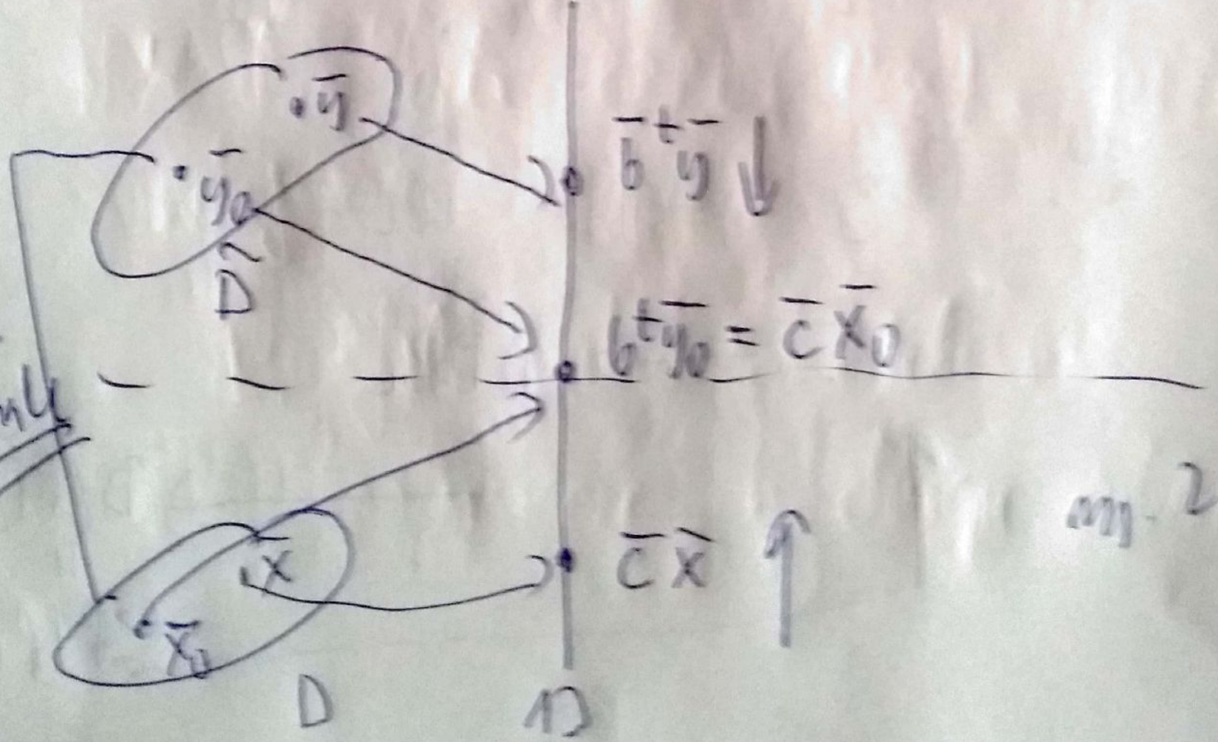
to istn. $\bar{y}_0 \in \tilde{D}$, że

$$\bar{b}^t\bar{y}_0 \le \bar{b}^t\bar{y} \text{ dla k. } \bar{y} \in \tilde{D}$$

oraz

2°. $\bar{c}\bar{x}_0 = \bar{b}\bar{y}_0$

<u>Komentarz</u> (wracamy do rys. 1)



rys. 2

Dalej pokażę w jaki sposób

możemy wykorzystać MZD.