Kurs BO
Forma zajęć: Wykład
Tryb: On-line

W7

Temat. Interpretacja zm. dualnych na wybranym przykładzie.
Uwagi n/t metod rozwiązania PPPL.

Na przykładzie I zagadnienia, tj. problemu wyboru asortymentu wolumenu produkcji wyjaśnimy znaczenie zmiennych decyzyjnych w DPPL.

Przypomnijmy, iż PPPL jest następujący (pierwotny PPL)
typu $m \times n$, n - liczba wyrobów, gdzie: $W_1, W_2, \dots, W_n$
m - liczba środków produkcji: $S_1, S_2, \dots, S_m$

Wektor decyzyjny $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdzie
$x_j = |W_j|$ - liczba jednostek wyrobu W_j,

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Max$$

$$\Updownarrow$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ oraz

$$\begin{cases} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n \le b_1 \\ g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + \dots + g_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots \\ g_{m1}x_1 + g_{m2}x_2 + \dots + g_{mn}x_n \le b_m \end{cases},$$

gdzie c_j - cena jednostkowa wyrobu W_j

g_{ij} - zużycie środka S_i na jednostkę wyrobu W_j

śr. \ wyroby	W_1	W_2	...	W_j	...	W_n	Limit
S_1	g_{11}	g_{12}	..	g_{1j}	..	g_{1n}	b_1
S_2	g_{21}	g_{22}	..	g_{2j}	..	g_{2n}	b_2
:	-	-	-	-	-	-	-
S_i	g_{i1}	g_{i2}	..	g_{ij}	..	g_{in}	b_i
:	-	-	-	-	-	-	-
S_m	g_{m1}	g_{m2}	..	g_{mj}	..	g_{mn}	b_m
cena j.	c_1	c_2	..	c_j	..	c_n	////

$G = [g_{ij}]_{m \times n}$

$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

W postaci macierzy mamy:

$\mathbb{R}^n \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \text{Max}, \quad \bar{x} = [x_1, x_2 \dots x_n]^T$

$\Updownarrow$

$\bar{x} \geq \bar{0} \;\&\; G\bar{x} \le \bar{b},$

Bierzemy programowanie dualne, czyli:

typ $n \times m$,

decyzja $\bar{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^t$

$$R^m \supset \tilde{D} \ni \bar{y} \longrightarrow \bar{b}^t \bar{y} \longrightarrow Min$$

$$\Updownarrow \quad \bar{y} \geq \bar{0} \quad \& \quad G^t \bar{y} \geq \bar{c}^t$$

Znając interpretację ekonomiczną: $\bar{c}, \bar{G}, \bar{b}$, ustalmy znaczenie zmiennej decyzyjnej dla omawianego przypadku.

Kluczem jest zrozumienie nierówności $G^t \bar{y} \geq \bar{c}^t$

Zapiszmy je w postaci analitycznej:

$$G^t \bar{y} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \phantom{g_{11}} & \phantom{g_{21}} & & j & & \phantom{g_{m1}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{j1} & \dots & g_{m1} \\ g_{12} & g_{22} & & g_{j2} & & g_{m2} \\ g_{1i} & g_{2i} & & g_{ji} & & g_{mi} \\ g_{1n} & g_{2n} & & g_{jn} & & g_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Zatem i-ty warunek ograniczający ma postać

$$\cancel{g_1 y_1 + g_2 y_2 + \dots + g_j y_j + \dots + g_m}$$

$$\text{i-ty: } \underline{g_{1i} y_1 + g_{2i} y_2 + \dots + \underbrace{g_{ji} y_j}_{(*)} + \dots + g_{mi} y_m} \geq c_i$$

Weźmy j-ty składnik lewej strony $(*)$: $g_{ji} y_j$.

Ponieważ w $(*)$ mamy porównanie stron, oraz

$c_i \left[\frac{\# zł}{j W_i}\right]$ „liczba jedn. waluty na jednostkę wyrobu W_i"

to składnik $g_{ji} y_j$ musi mieć takie MIANO.

Ale $g_{ji} \left[\frac{\# j S_j}{j W_i}\right]$, więc aby tak było musi być

$y_j \left[\frac{\# zł}{j S_j}\right]$, czyli koszt jednostki zużycia środka produkcji S_j w omawianym procesie.

Wtedy $g_{ji} y_j$ – koszt zużycia S_j na jednostkę W_i, skąd ~~...~~ lewa strona $(*)$ oznacza łączny koszt zużycia wszystkich środków $S_1, S_2, \dots, S_m$ na jednostkę W_i.

Wtedy

$\bar{y} \longrightarrow \bar{b}^t \bar{y}$ – łączny koszt zużycia zapasu wszystkich środków $S_1, \dots, S_m$.

W programowaniu dualnym podejmuje się decyzję

$\bar{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ taki, że

$$\bar{b}^t \bar{y}_0 \le \bar{b}^t \bar{y}, \quad \bar{y} \in \tilde{D},$$

a więc optymalizuje mi koszty jednostkowe wszystkich środków produkcji, które w programowaniu pierwotnym miały wpływ na max przychodu.

ZAD. Prześledzić powyższy procedury ustalania znaczenia zerowych zm. decyzyjnych dla sytuacji II lub III.

Uwagi n/t rozwiązania PPL

Weźmy PPL typu m×n dane w postaci macierzowej

$$R^n \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to Max$$

$$\Updownarrow \quad \bar{x} \ge \bar{0} \ \& \ G\bar{x} \le \bar{b}, \quad \bar{x} = [x_1, x_2, .., x_n]^t$$

Def 1. Powiemy, że PPL jest niesprzeczne, jeśli $D \neq \emptyset$.

Tw. (o rozwiązaniu PPL) (wersja dla Min identyczna!)

Każde niesprzeczne i ograniczone PPL ma co najmniej jedno rozwiązanie, czyli istnieje $\overline{x}_0 \in D$, że

$$\overline{c}\,\overline{x} \leq \overline{c}\,\overline{x}_0 \text{ dla wszystkich } \overline{x} \in D.$$

Co więcej, istnieje algorytm, który pozwala $\overline{x}_0$ skonstruować. Jest to tzw. algorytm SYMPLEKS.

$\boxed{\text{Dalej zajmiemy się tylko sytuacjami szczególnymi: } m\times 2 \text{ oraz } 2\times n.}$

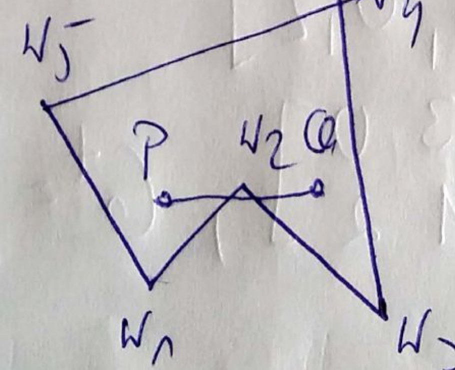
Przypadek $m \times 2$.

$n=2$ oznacza, że $\overline{x} = [x, y]^t$, czyli $D \subset \mathbb{R}^2$

Jeśli PPL jest jak w tw., to D jest wielokątem wypukłym złożonym ze skończonej ilości wierzchołków: $W_1(x_1, y_1)$, $W_2(x_2, y_2)$, ..., $W_k(x_k, y_k)$.

tw. SYMPLEKS

Uwaga.



rys. 1

Na rys. 1 mamy przykład wielokąta (wierzchołki W_1, W_2, W_3, W_4, W_5), który nie jest wypukły: odcinek łączący punkty P, Q z wnętrza wielokąta nie zawiera się w tym wnętrzu.

Wtedy rozwiązanie optymalne $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ wypada w jednym z wierzchołków.
Aby je zidentyfikować należy:

1^0. Podstawić współrzędne $W_j(x_j, y_j)$ do funkcji celu

$$\{\bar{c}W_1, \bar{c}W_2, \ldots, \bar{c}W_k\} \subset \mathbb{R}$$

2^0. Z otrzymanego zbioru liczbowego wybrać liczbę największą.

Jeśli np. jest to liczba $\bar{c}W_i$, to

$$W_i = \bar{x}_0$$

Uwaga. Tak samo jest dla przypadku Min.

P1. Rozwiązmy przykład ilustrujący zagadnienie I.

Mamy tutaj $m = n = 2$

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{c}\bar{x} \to \text{Max}, \text{ gdzie}$$

$$\bar{x} = [x, y]^T$$

$$\bar{c} = [30, 40], \text{ gdzie}$$

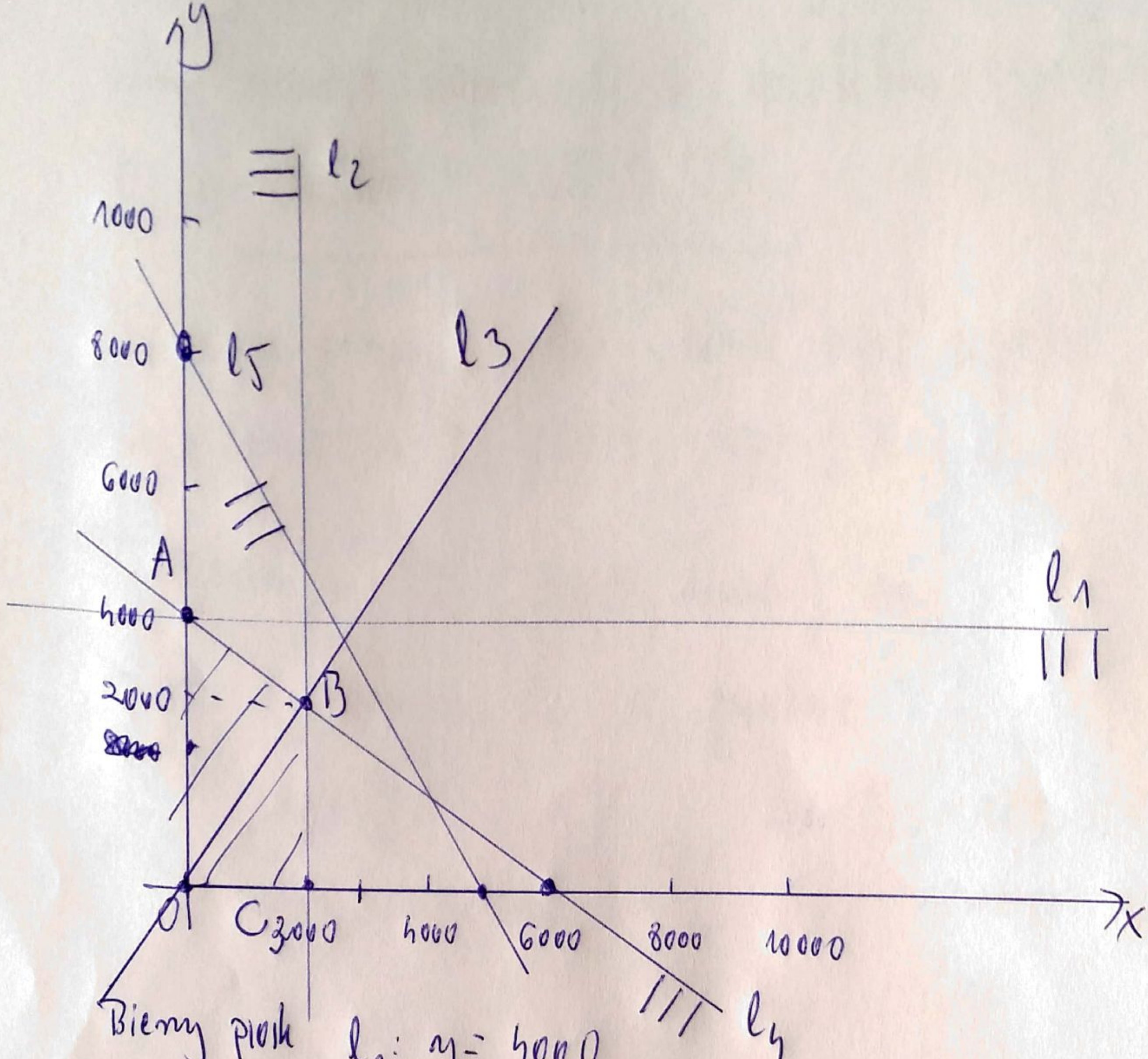
WB
$$0 \leq x \leq 3000$$
$$0 \leq y \leq 4000$$
$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

W.O.
$$G\bar{x} \leq \bar{b}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 96000 \\ 80000 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}, \text{ czyli}$$

$$\begin{cases} 16x + 24y \leq 96000 \\ 16x + 10y \leq 80000 \end{cases}$$

Rozw. Rozwiązmy graficznie WB & WO.



l_1: $y = 4000$

l_2: $x = 3000$

l_3: $y = \frac{2}{3}x$

l_4 $16+24y \leq 96000 \iff 2x+3y = 12000$

l_5 $16x+10y = 80000 \iff 8x+5y = 40.000$

Pomińmy na chwilę warunek $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

Wtedy rozwiązanie dopuszczalne jest wielokątem wypukłym o wierzchołkach: A, B, C, O.

W naszym przypadku muszę wziąć część wspólną tego wielokąta z prostą $y = \frac{3}{2}X$ (l_3)

Zauważmy, że $B(3000, 2000)$ oraz prosta l_3 przecina l_4 w punkcie

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ 2x + 3y = 12000 \end{cases} \iff \begin{array}{l} 2x + 2x = 12000 \\ 4x = 12000 \\ x = 3000 \\ y = 2000, \end{array}$$

czyli w B.

Dlatego w tej szczególnej sytuacji ZRD jest odcinkiem OB (to też wielokąt wypukły).

Mamy tylko 2 wierzchołki $O(0,0)$ i $B(3000, 2000)$

Jasne, że B jest rozwiązaniem, oraz

$$F(B) = \underline{170.000}.$$

10

Przypadek $2 \times n$ $(m=2)$.

Rozwiązanie polega na zastosowaniu MZD von Neumanna, co wyjaśnię na kolejnym przykładzie.

Przykład:

Tartak otrzymał zamówienie na wykonanie co najmniej 300 kompletów belek. Każdy komplet składa się z: 7 belek dł. 0,7m oraz 4 belek dł. 2,5m. W jaki sposób powinno być zrealizowane zamówienie, by odpad powstały w procesie cięcia dłużyc o dł. 5,2m był minimalny. Ile wynosi wielkość odpadu przy optymalnym cięciu?

Rozw.

Identyfikacja: problem wyboru technologii – zagad. wycinania.

Konstrukcja modelu

definicja wyrobów: W_1 – belka dł. 0,7 m

W_2 – belka dł. 2,5 m

$m=2$

definicja technologii:

T_1: $7 \times 0{,}7 + 0 \times 2{,}5$ odpad $0{,}3$

T_2: $3 \times 0{,}7$ $1 \times 2{,}5$ $0{,}6$

T_3: $0 \times 0{,}7$ $2 \times 2{,}5$ $0{,}2$

Zatem $n=3$ i mamy po agregacji

w \ tech	T_1	T_2	T_3	Produkcja
W_1	7	3	0	2100
W_2	0	1	2	1200
odpad	0,3	0,6	0,2	

Nasz PPL jest typu 2×3, gdzie

$\bar{x} = (x, y, z)$, x - # cięć T_1

y - # cięć T_2

z - # cięć T_3

$0{,}3x$ - odpad z T_1

$0{,}6y$ - -"- z T_2

$0{,}2z$ - odpad z T_3

Dlaho

$\mathbb{R}^3 \supset D \ni (x, y, z) \longrightarrow \underbrace{0{,}3x + 0{,}6y + 0{,}2z}_{\text{odpad tąży}} \to \mathrm{Min}$

$\Updownarrow$

$x, y, z \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} 7x + 3y &\geq 2100 \\ y + 2z &\geq 1200 \end{aligned}\right\}$$

<u>Skrsufy MZD</u> :

Duahe 3×2

$\mathbb{R}^2 \supset \tilde{D} \ni \bar{y} = [y_1, y_2]^t \longrightarrow \bar{b}^t \bar{y} \to \mathrm{Max}$

$\bar{b} = \begin{bmatrix} 2100 \\ 1200 \end{bmatrix}$

$\bar{y} \in \tilde{D} \iff \bar{y} \geq \bar{0}$ i $G^t \bar{y} \leq \bar{c}^t$

$\bar{c} = [0{,}3, 0{,}6, 0{,}2]$

$G = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad G^t = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

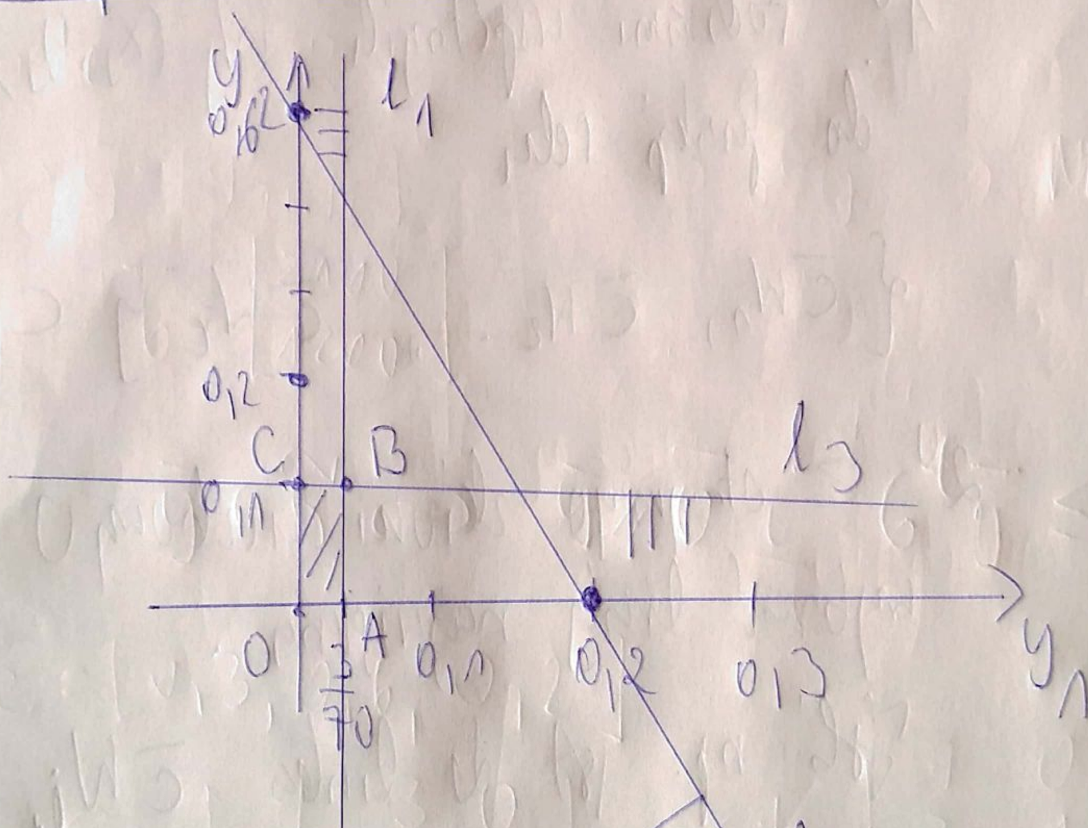
Dla zad. p. analitycznego dualnego

$\tilde{D} \ni (y_1, y_2) \longrightarrow 2100y_1 + 1200y_2 \to MAX$

(1) $y_1, y_2 \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} l_1 \quad & 7y_1 \leq 0{,}3 \\ l_2 \quad & 3y_1 + y_2 \leq 0{,}6 \\ l_3 \quad & 2y_2 \leq 0{,}2 \end{aligned}\right\} (*)$$

Rozwiązanie dualne



Zatem $\tilde{D}$: prostokąt OABC.

Zauważmy, że dla B wartość f. c.

jest największa, gdzie $B = \left(\frac{3}{70}, \frac{1}{10}\right) = \overline{y_0}$

Zatem dualne ma rozwiązanie.

MZD mówi, że Pierwotne też ma

rozwiązanie $(x_0, y_0, z_0) \in D$ oraz

$$0{,}3x_0 + 0{,}6y_0 + 0{,}2z_0 = 2100 \cdot \frac{3}{70} + 1200 \cdot \frac{1}{10}$$

$$= 90 + 120 = \underline{\underline{210}}$$

Pokażmy jak znaleźć $\overline{x_0} = (x_0, y_0, z_0)$.

Z Tw. $\overline{x_0}$ jest wierzchołkiem D, zatem

$$\begin{cases} 7x_0 + 3y_0 = 2100 \\ y_0 + 2z_0 = 1200 \end{cases} \quad (!)$$

Bierzemy kolejno wsp. (x_0, y_0, z_0) i sprawdzamy czy

B leży, czy nie leży na kolejnej prostej określającej $\tilde{D}(*)$ tylko dla analizowanej składowej (x_0, y_0, z_0) nie leży to mu ona wartość 0, w przeciwnym razie zostawiamy ją (trzeba wyliczyć).

Mamy kolejno:

x_0 (I warunek z l_1)

$$7 \cdot \frac{3}{70} = 0{,}3 = 0{,}3$$, x_0 liczymy

y_0 (II warunek z l_2)

$$3 \cdot \frac{3}{70} + 0{,}1 = \frac{9}{70} + \frac{1}{10} = \frac{16}{70} < \frac{6}{10}$$

$$y_0 = 0$$

z_0 (III warunek z l_3)

$$2 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}2 = 0{,}2$$, z_0 liczymy.

Stąd mamy: $\left.\begin{array}{l} 7x_0 = 2100 \\ 2z_0 = 1200 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x_0 = 300 \\ z_0 = 600 \end{array}$

$\overline{X}_0 = (300, 0, 600)$. $F(\overline{X}_0) = 300 \cdot 0{,}3 + 600 \cdot 0{,}2 = \underline{210}$.