Kurs: Badania Operacyjne

Forma: Wykład

Tryb Online. W8

Temat. Uwagi n/t rozwiązania ZZT oraz zjawisko „zamknięcia" OZT.

Przypomnijmy ZZT:

Dane. m - dostawców: $D_1, D_2, .., D_m$ (strona podażowa)

n - odbiorców: $O_1, O_2, .., O_n$ (strona popytowa)

ZZT zamknięte, gdy $\sum_{i=1}^{m} |D_i| = \sum_{j=1}^{n} |O_j|$

zmienna decyzyjna $[x_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}$, gdzie

x_{ij} ilość dostarczonego towaru

$$D_i \xrightarrow[c_{ij}]{x_{ij}} O_j$$

$[c_{ij}]_{m \times n}$ - macierz kosztów, gdzie

c_{ij} - koszt przewiezienia jednostki towaru na trasie $D_i \to O_j$

Wtedy

$$\mathbb{R}^{n+m} \supset D \ni [x_{ij}]_{m \times n} \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}}_{\text{Koszt całego przewozu}} \rightarrow \text{Min}$$

$$F([x_{ij}]_{m\times n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$\sum_{i=1}^{n} |D_i|$ towaru.

$\Downarrow$

$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1 .. m$
$\qquad\qquad j = 1 .. n$

(brak strat.)

$$\left.\begin{aligned} D_1 &: x_{11} + x_{12} + .. + x_{1n} = |D_1| \\ D_2 &: x_{21} + x_{22} + .. + x_{2n} = |D_2| \\ &\vdots \\ D_m &: x_{m1} + x_{m2} + .. + x_{mn} = |D_m| \end{aligned}\right\} \text{od strony dostawców}$$

$$\left.\begin{aligned} O_1 &: x_{11} + x_{21} + .. + x_{m1} = |O_1| \\ O_2 &: x_{12} + x_{22} + .. + x_{m2} = |O_2| \\ &\vdots \\ O_n &: x_{1n} + x_{2n} + .. + x_{mn} = |O_n| \end{aligned}\right\} \text{od strony odbiorców.}$$

Fakt (O rozwiązaniu ZZT).

Każde ZZT ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Można je skonstruować przy użyciu tzw. Algorytmu TRANSPORTOWEGO (AT)

Jego idea polega na modyfikacji wybranej z D decyzji. Dokładniej, jeśli

$\bar{X}^1 = [x_{ij}^1]_{m\times n} \in D$ jest daną decyzją, to AT generuje skończony ciąg kolejnych decyzji

$\bar{X}^2 = [x_{ij}^2]_{m\times n}$, $\bar{X}^3 = [x_{ij}^3]_{m\times n}$ ... $\bar{X}^k = [x_{ij}^k]_{m\times n}$

że

$$\forall_{[x_{ij}]_{m\times n} \in D} \quad F([x_{ij}]_{m\times n}) \geq F([\bar{x}_{ij}^k]_{m\times n}),$$

czyli $[x_{ij}^k]_{m\times n}$ jest decyzją optymalną.

Na tym kursie AT nie będzie przedstawiony ze względu na jego złożoność. Pokażę jedynie dwa sposoby wyboru decyzji inicjującej AT, czyli $\bar{x}^1 = [x_{ij}^1]_{m\times n}$.

W tym celu weźmy przykład

Dostawcy \ Odbiorcy	(O_1) P_1	(O_2) P_2	(O_3) P_3	(O_4) P_4	Podaż
(D_1) M_1	50	40	50	20	70
(D_2) M_2	40	80	70	30	50
(D_3) M_3	60	40	70	80	80
Popyt	40	60	50	50	200 \ 200

Z.Z.T.

Uwaga. Fragment zaznaczony w kolorze czerwonym — macierz kosztów jednost. $C = [c_{ij}]_{3\times 4}$

$$D \ni [x_{ij}]_{3\times 4} \longrightarrow F([x_{ij}]_{3\times 4}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$\Updownarrow$

$x_{ij} \geq 0$ & W.O. jak we wstępie.

Metoda I „lewego górnego rogu macierzy przewozów"

Krok 1. Rysujemy siatkę macierzy przewozów jak niżej

	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	40				70
D_2					50
D_3					80
	40	60	50	50	

Składa się ona z „kratek" o adresach $D_i \times O_j$

Zaczynamy od „kratki" $D_1 \times O_1$:

Krok 2.

$$\begin{array}{ccc} & O_1 & \\ D_1 & & 70 \\ & 40 & \end{array}$$

Z liczb $\{40, 70\}$ wybieramy mniejszą, wpisujemy do kratki, oraz idziemy

$\boxed{}$ $\downarrow$ większa albo $\boxed{} \longrightarrow$ większa

U nas $\longrightarrow$ $D_1 \times O_2$

Krok 3 Aktualizujemy podaż & popyt

O_2

D_1 $70 - 40 = 30$

60

i powtarzamy krok 2.

W efekcie otrzymujemy

	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	40	30			70
D_2		30	20		50
D_3			30	50	80
	40	60	50	50	

Krok 4 Pozostałe komórki zostawiamy puste = 0.

Zauważmy, że podana macierz $[x_{ij}^1]_{3\times 4}$

$$[x_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \in D \quad ,$$

zatem $[\hat{x}_{ij}]$ można użyć dla celu A.T.

Obliczmy

$$F([x_{ij}^1]) = 40\cdot 50 + 40\cdot 30 + 30\cdot 80 + 20\cdot 70 + 30\cdot 70 + 50\cdot 80 = \underline{\underline{13.100}}$$

<u>Metoda 2</u>. „Najmniejszego elementu macierzy kosztów”

<u>Krok 1</u>. Przepiszmy macierz C

$$C = \begin{bmatrix} 50 & 40 & 50 & \boxed{20} \\ 40 & 80 & 70 & \boxed{30} \\ 60 & \boxed{40} & 70 & 80 \end{bmatrix}$$

i poddajmy ją EWOLUCJI, która pomoże

wskazać komórki $D_i \times O_j$, dla których „relatywne" koszty są najmniejsze:

W tym celu zaczynamy od WIERSZY:

Krok 2. W każdym wierszu wskazujemy liczbę najmniejszą, a następnie modyfikujemy wszystkie komórki tego wiersza pomniejszając dane wartości o tę najmniejszą.

$$C \longrightarrow C_1 = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 30 & 0 \\ \boxed{10} & 50 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & \boxed{30} & 40 \end{bmatrix}$$

W efekcie w każdym wierszu jest co najmniej jedno „0". Wskazuje ono komórkę, gdzie „relatywne" koszty są najmniejsze..

Krok 3: Przechodzimy do KOLUMN, aby uzupełnić je o brakujące „0" w.g. zasady zastosowanej do wierszy.

Jak widać z C_1, trzeba to zrobić tylko dla kolumn: I i III.

$$C \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}.$$

Krok 4. Macierz C_2 pozwala skonstruować macierz przewozów.

W tym celu w siatce tej macierzy rezerwujemy miejsca odpowiadające tym komórkom $D_i \times O_j$, w których są „0" (z C_2).

$$
\left[\tilde{x}_{ij}^{1}\right] = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc}
 & & \overset{30}{x} & \overset{40}{x} \\
x^{40} & & & \overset{10}{x} \\
 & \overset{60}{x} & \overset{20}{x} &
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} O_j \\ 70 \\ 50 \\ 80 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc} D_i & 40 & 60 & 50 & 50 \end{array}
$$

a następnie wypełniamy je wartościami przewoz na zasadach jak w Met. I.

<u>ZACHODZĄ DWIE MOŻLIWOŚCI</u>

1° Powstanie decyzja z D (tak jak w przykładzie).

$$
\left[\tilde{x}_{ij}^{1}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \end{bmatrix} \in D
$$

Wtedy jest ona <u>też OPTYMALNA!</u>

Zauważmy, że $F([\tilde{x}_{ij}]) = 8.000$

(Porównaj z Met. I!).

2°. Nie powstanie decyzja z D. Wtedy trzeba użyć pozostałych komórek, aby ją uzyskać.

Ale taki przydział nie będzie optymalny!

OZT – procedura „zamknięcia" do ZZT

Przykład. Zmodyfikujmy poprzedni do [illegible].

Dost\Odb	(O$_1$) P$_1$	(O$_2$) P$_2$	(O$_3$) P$_3$	(O$_4$) P$_4$	Podaż
(D$_1$) M$_1$	50	40	50	20	100
(D$_2$) M$_2$	40	80	70	30	50
(D$_3$) M$_3$	60	40	70	80	80
Popyt	140	60	50	50	230 / 200

Podaż > Popyt

Jak widać, $\sum D_i - \sum P_j = 230 - 200 = \underline{\underline{30}}$.

Proces „domykania" OZT do ZZT polega na wprowadzeniu w modelu wirtualnego odbiorcy O^*. W praktyce będzie to miejsce składowania nadwyżki.

Przyjmijmy, że koszty transportu do O^* są następujące

	O^*
M_1	5
M_2	5
M_3	6

Daje to nam

	O_1	O_2	O_3	O_4	O^*	Podaż
D_1	50	40	50	20	5	100
D_2	40	80	70	30	5	50
D_3	60	40	70	80	6	80
Popyt	40	60	50	70	$\boxed{30}$	230 ~~200~~

Po tych zmianach, mamy „nowe" zmienne decyzyjne:

$$\bar{X} = [x_{ij}]_{3\times 5} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{bmatrix}$$

część przewozowa

część podlegająca składowaniu

macierz przewozu-składowania

Wtedy

$$D \ni \bar{X} \longrightarrow F(\bar{X}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}}_{\text{koszt przewozu}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{3} c_{i5}x_{ij}}_{\text{koszt przewozu i składowania nadwyżki}} \longrightarrow \text{Min}$$

Gdy $\bar{X} \in D \iff$

$x_{ij} \geq 0$ &

$$
\left.
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{l}
D_1 : x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{14} + x_{15} = 120 \\
\vdots \\
D_3 \quad x_{31} + x_{32} + \ldots + x_{34} + x_{35} = 80
\end{array}
\right\} \\
\left.
\begin{array}{l}
O_1 : x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40 \\
\vdots \\
O_4 : x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70 \\
O^* \quad x_{15} + x_{25} + x_{35} = 30
\end{array}
\right\}
\end{array}
\right\}
$$

ZAD.

Zaimplementować A.T. Metody I & II.

//.