

Kurs: M1 WE semestr zimowy 2026/2027

W1

T. Ciąg liczbony i jego własności

0. Podstawowe oznaczenia i definicje

Zbiory oznaczamy: $A, B, \dots, X$,

$a \in A$ oznacza, że „ a ” jest elementem zb. A .

$A = \{a, b, c\}$ oznacza, że A jest 3-elementowy.

Zbiory liczbowe: $\mathbb{N}$ - l. naturalne

$$n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = 1, 2, \dots$$

$\mathbb{Z}$ - l. całkowite

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$\hookrightarrow$ przeciwny do $\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ - l. wymierne

$$n \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow n = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$$

$\mathbb{R}$ - l. rzeczywiste

P1. Np. z trygonometrycznych wynika (dla tego! $1, u$)
 istnieją liczby $r \in \mathbb{R}$, że $r^2 = 2$.
 Udowodnić, że $r \notin \mathbb{Q}$

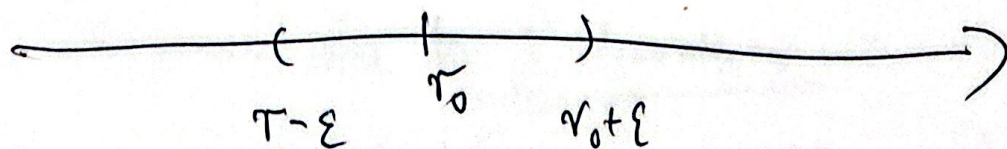
ε -otoczenie liczby $r_0 \in \mathbb{R}$ ($\varepsilon > 0$)

$$O(r_0; \varepsilon) = \{r \in \mathbb{R} : |r - r_0| < \varepsilon\},$$

gdzie $| \cdot |$ - wartości bezwzględna

P2. Niek $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Podać interpretację
 geometryczną liczby $|r_1 - r_2|$

Wzrost geometryczny. $O(r_0, \varepsilon)$



Ograniczenie liczby

$A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczona, gdy $\exists O(r_0, \varepsilon)$, że

$$A \subset O(r_0, \varepsilon)$$

2

P3. Uzasadnić, że każdy przedział otwarty
 $I_{ab} = (a, b)$ ($\langle a, b \rangle$ itd.), $a < b$
jest ograniczony.

Funkcja rzeczywista.

Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $A \neq \emptyset$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ lub $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

lub $A \ni x \longrightarrow y = f(x) \in \mathbb{R}$, gdzie

y jedyny dla każdego $x \in A$ nazywamy funkcją
rzeczywistą.

Wtedy $A \subset D_f$ - dziedzina funkcji f ,

P4. Przytoczyć kilka tw. f. elementarnych:

wielomiany (np. liniowy, trójmian), potęgowe, wykładnicze,
logarytmiczne, trygonometryczne, wymierne

P5. Oblicz drzedny rachunek f , jeśli
 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, $h(x) = \log_3 |\cos x|$.

P6. Narysuj wykres funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2; & x < 0 \\ 2+x; & x \geq 0 \end{cases}$$

10. Ciąg liczbony

Niech $N_0 \subset \mathbb{N}$; $N_0 \neq \emptyset$.

Każdą $f: N_0 \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy
ciągłem liczbony.

Oznaczamy wtedy

$$N_0 \ni n \longrightarrow f(n) \in \mathbb{R}$$

$\downarrow$

"n-ty" wyraz ciągu f

Gdy no showing, to.

$$N_0 = \{1, 2, \dots, k\} \quad k \geq 2,$$

Wtedy ciąg f zapisujemy def

$$f = (f(1), f(2), \dots, f(k)) = (f(j))_{j=1}^k$$

Dalej zakładamy, iż $N_0 = \mathbb{N}$.

Wtedy $f = (f(n))_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n \geq 1},$

gdzie $a_n \stackrel{\text{def}}{=} f(n).$

P.7. Pomyślnie sobie def. ciąg arytmetyczny
i geometryczny.

P.8. Niech $f: \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ i $\mathbb{D}_f \supset \mathbb{N}$.

Wtedy $x \rightarrow n$ daje $f(x) = f(n) = a_n$.

Np. $a_n = n^2$, $n \geq 1$

$$b_n = n^2 - n + 1, \quad n \geq 1 \quad \text{itd.}$$

Inne przykłady:

(*) $a_n = (-1)^n, n \geq 1$ „naprzemienny”

(**) $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$ c. Eulera

(***) $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, n \geq 1$ c. harmonicznego.

2. Monotoniczne ciągi

Niech dany będzie ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$.

Yśli: (i) $\forall_{n \geq 1} a_n < a_{n+1} \equiv$ rosnący

(ii) $\forall_{n \geq 1} a_n > a_{n+1} \equiv$ malejący

(iii) $\forall_{n \geq 1} a_n \leq a_{n+1} \equiv$ niemalejący

(iv) $\forall_{n \geq 1} a_n \geq a_{n+1} \equiv$ nie rosnący.

P.9. Zbadaj monotoniczne ciągi:

$\frac{n}{n+1}$) $\sqrt{n^2 + 4n} - n, n \in \mathbb{N}, (h_n) (***)$

FAKTA. (e_n) jest rosnący.

3. Ograniczone cięgi

Mówimy, że $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony*, jeżeli

$$\exists O(a_0, \varepsilon), \text{ że } \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in O(a_0, \varepsilon),$$

czyli wszystkie wyrazy (a_n) należą do pewnego przedziału.

P.10. (e_n) jest ograniczony, bowiem

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} 0 < e_n < 3$$

P.11. (h_n) nie jest ograniczony.
Spróbujmy to udowodnić

P.12. Zbadaj ograniczone:

$$\frac{3^n}{3^n + 2} ; \sqrt[n]{n^2 + 4}, (-1)^n.$$

* Zbiór wartości (a_n) , z $a_n, n \in \mathbb{N}$ jest ograniczony

4°. ~~4~~ "głowa" i "ogon" ciągu.

Wziemy ciąg (a_n) i ustalimy $n_0 \geq 2$.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}}_{\text{"głowa"}}, \underbrace{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots}_{\text{"ogon"}})$$

Uwaga.

Dalej, jak robiliśmy, o "dobrym" zachowaniu n ciągu decydujemy tylko zachowanie n jego ogona.

5°. Granica ciągu jako miara jego stabilności

Poniemy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest stabilny, jeśli

W Każde ε -okno pewnej linii g zawiera ogon tego ciągu,

czyli

$$(\forall \varepsilon > 0) \exists n_0 \forall n > n_0 \quad a_n \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$$

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Minimalny wkład

"ośrodek" $\in$ " ε -otoczenie g " $\equiv$

"promień wystętki wyosny" $a \in$

" ε -otoczenie g " .

Nkshole' to zapisujący :

(i) $(a_n) \rightarrow g$, albo króci

(ii) $a_n \rightarrow g$

i nazywamy zbiętności $a \in$ (a_n) do linii
 g , które nazywamy ^{tego} granicę .

Uwaga Inne notacja

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim a_n$

P13. Uzasadnić, że $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

P14. Wykazać, że $(-1)^n$ nie jest zbieżny.

FAKT 2.

Ciąg zbieżny nie może mieć dwóch (i więcej) granic.

P15. (e_n) p. zbieżny. Jego granicą
oznaczy literę $e \in (2, 3)$ (Euler).
 $e \notin \mathbb{Q}$.

FAKT 3.

Ciąg zbieżny p. ograniczony.
P14 pokazuje, że tw. odwrotne p. falszywe

P16 (n_n) nie może być zbieżny (dlatego!).