

Kurs M1 Energet.

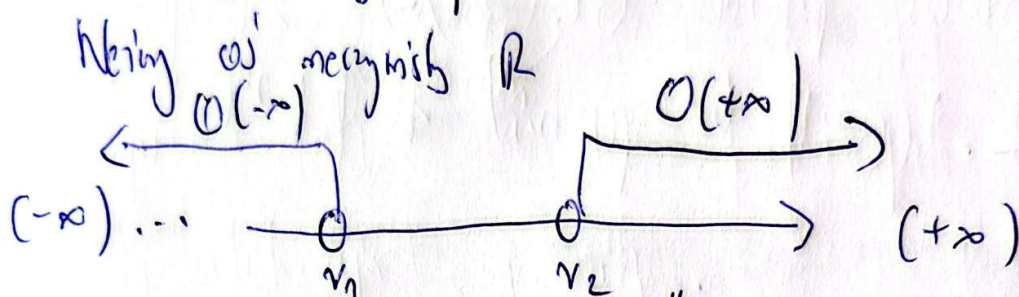
N2

Temat. Ciąg linbowe c.d. Pójne granicy funkcji.

1. Ciąg rozbieżne — granica niewłaściwa.

Niech dany będzie (a_n) . Mch $a_n \rightarrow g \in \mathbb{R}$, to g będzie nazywaliśmy granica właściwa.

W przypadku stałego zachowania ci a_n może zdarzyć się jedna z dwóch sytuacji.



Nyobraćmy sobie, że ma ona "same konie (czyli nie są one liczbami!).

Leży oznaczamy " $-\infty$ ", prawy " $+\infty$ ", jak widać.

Dla lino v_1, v_2 możemy mieć wtedy o okienkach $\pm \infty$: $O(-\infty) = (-\infty, v_1)$

$$O(+\infty) = (v_2, +\infty)$$

Def (rozbieżność ciągu)

Pomniemy, że (a_n) rozbieżny, jeśli zachodzi

jeden z dwóch przypadków:
albo

$$(i) \text{ ogon } (a_n) \text{ zbieżny p' w } O(-\infty)$$

$$\text{albo } (i') \text{ ogon } (a_n) \text{ zbieżny p' w } O(+\infty).$$

N symbolizuj (i) p'niemy: $a_n \rightarrow -\infty$ lub
 $\lim a_n = -\infty$)

$$(ii) \quad a_n \rightarrow +\infty \text{ lub } \lim a_n = +\infty$$

(i' m'niemy, i' (a_n) p'niemy, lub ma granicę
niewłaściwą (bo $\pm\infty$ nie s' s' liczbami!).

Podsumujmy Dla (a_n) stabilności oznacza
zbieżność lub rozbieżność.

Ale przykład ciągu $(-1)^n$, n'niemy, pokazuje, że
istnieje jeszcze inne t'meń przypadków — ciągi, które
nie s' zbieżne.

Pr. Uzasadnij, że

$$\sqrt{n} + 1 \rightarrow +\infty, \quad -n^2 + 5 \rightarrow -\infty.$$

Problem 1

Jak rozstrzygnąć, czy ciąg (a_n) jest dobiegający?

Krok 1. Najpierw sprawdzamy, czy jest ograniczony.

Jest NIE, koniec: nie ma granicy właściwej.

Jest TAK, to

Krok 2. Wybieramy jedno z dwóch twierdzeń poniżej.

Tw 1 (o arytmetyce granic).

Niech $(a_n), (b_n)$ takie, że

$$a_n \rightarrow a \quad i \quad b_n \rightarrow b \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Wtedy

$$(i) \quad c_n = a_n \pm b_n$$

$$(ii) \quad d_n = a_n \cdot b_n$$

Należy (c_n) i (d_n) są zbieżne oraz

$$c_n \longrightarrow c = a + b$$

$$d_n \longrightarrow d = a \cdot b.$$

Jśli dodatkowo $b_n \neq 0$, $n \geq 1$ i $b \neq 0$,

$$\text{to } f_n = \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}.$$

7.2 Skonstruuj Tw 1 zbieżny zbieżny ciąg

$$\sqrt{n^2 + 4n - 1} - \sqrt{n^2 + 2n} ;$$

$$(n^{20} + 2)^3$$

$$(n^3 + 1)^{20}$$

$$\frac{n^3 + 2n^2 + 1}{n - 3n^3}$$

$$\sqrt{4^n + 1}$$

$$\sqrt[3]{8^n + 1}$$

Zakaz stosowania Tw 1 p' ograniczony.

Wtedy potrzebujemy kolejnego tw.

Tw2 (o 3 cięgach)

Nich Dla cięgu (a_n) istnieje taka cięga' (b_n) i' (c_n)
ie zachodzą nierówności (dla ich ogondu)

$$b_n \leq a_n \leq c_n, \quad n \geq n_0$$

Wz' (i) $b_n \rightarrow b$ i' $c_n \rightarrow c$

(i') $b = c$, to

$$a_n \rightarrow a = b = c.$$

P3. Skorzystaj tw2 zbuduj cięgi (a_n) , jth

$$\frac{2n + (-1)^n}{3n + 2}$$

$$\sqrt[n]{3^n + 2^n}$$

$$\frac{2^n \sin n}{3^n + 1}$$

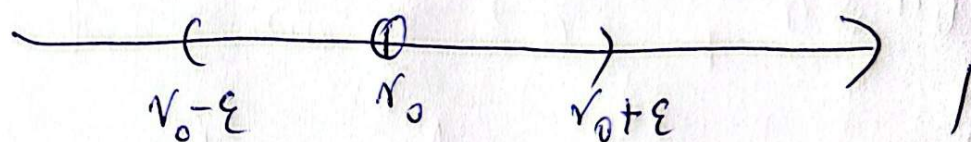
$$\sqrt[n+1]{2n + 3}$$

2^o. Zachowanie m. funkcji na ścisłości - granice funkcji

Def (ściśle punktu)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. ε -ściśle punktu x_0
nazwaną zleń

$$S(x_0, \varepsilon) = O(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}$$



Czyli $S(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$

Wtedy $(x_0 - \varepsilon, x_0) = S_-(x_0, \varepsilon)$ - lewa półścisłość

$(x_0, x_0 + \varepsilon) = S_+(x_0, \varepsilon)$ - prawa

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, i niech

dla pewnego $\varepsilon > 0$ i x_0 $S(x_0, \varepsilon) \subset D_f$,
czyli f określona jest na ścisłości $S(x_0, \varepsilon)$!

Def (granice funkcji w punkcie)

f zachowuje się stabilnie na $S(x_0, \varepsilon)$ (ma granicę w pkt. x_0), gdy

$$\exists g \in \mathbb{R} \quad \forall \begin{matrix} (x_n) \\ x_n \in D_f \\ x_n \neq x_0 \end{matrix} \quad (x_n \rightarrow x_0) \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow g)$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0} f = g$, albo

$$f \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g$$

Pr, sprawdzajmy $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x-7}{2x-7} \xrightarrow{x \rightarrow 7} 1$

(K1) Bierzemy ciąg (x_n) :

- $x_n \in D_f$
- $x_n \neq 7$
- $x_n \rightarrow 7$.

(K2) Bierzemy zachowujące się ciągi

$$f(x_n) = 2x_n - 7 \quad \therefore \text{jeśli } x_n \text{ zachowuje się}$$

$$(2x_n) \text{ i ciąg stały } 7.$$

-7 -

Zobaczmy

$$2x_n \rightarrow 2 \cdot 4 = 8$$

$$7 \rightarrow 7$$

Zatem $f(x_n) \rightarrow 8 - 7 = 1$, co dowodzi
na mocy def., że

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 7) = 1.$$

Uwaga 1. Niech $S = S_{-}^{(x_0)} \cup S_{+}^{(x_0)}$.

Jeśli f zachowuje się stabilnie na S_{-} , to

$$\text{mamy: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f = q_{-},$$

na S_{+}

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = q_{+}.$$

Wtedy q_{-} i q_{+} nazywamy granicami
jednostronnymi (lewą i prawą).

Nie rausu $q_- = q_+$.

Jeśli $q_- = q_+$, to f ma granicę

w 0 i $q = q_- = q_+$

PS. Niech $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Bierzemy $f(x) = x \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Zbadajmy zachowanie f na $S(0)$.

W tym celu zbadamy na $S_-(0)$ i $S_+(0)$

$S_-(0)$: bierzemy $(x_n) \in D_f$, $x_n < 0$ i $x_n \rightarrow 0$

$$f(x_n) = x_n \operatorname{sgn} x_n = -x_n \rightarrow 0 = q_-$$

$S_+(0)$ $(x_n) \in D_f$, $x_n > 0$ i $x_n \rightarrow 0$

$$f(x_n) = x_n \operatorname{sgn} x_n = x_n \rightarrow 0 = q_+$$

zatem $q_- = q_+ = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$

-9-

Uwaga 2 . Można badać zachowanie h. f. na

$$S(-\infty) = (-\infty, \alpha_0) \quad \underline{1}$$

$$S(+\infty) = (\alpha_0, +\infty)$$

Należy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = q \quad \text{oznacza, że}$$

$$\forall (x_n) \quad (x_n \rightarrow -\infty) \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow q)$$

$x_n \in D_f$

Analogicznie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = q \quad \text{oznacza, że}$$

$$\forall (x_n) \quad (x_n \rightarrow +\infty) \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow q)$$

P6 Obliczyć $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x^3}{x^3+1}$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x + 1)$$

Uwaga.

f w pkt. lub $\pm\infty$ może mieć granicę
nieustalone ($= \pm\infty$) , np.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$$

P7.

Rozpisać powyższe przypadki, tak jak to
ma definicja granicy.

P8.

Uzasadnić, że

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^7} = -\infty$$