

Kurs MA Energetyka

N3

Temat Ciągłości funkcji

Niek $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$

jest zdefiniowany, $x_0 \in D_f$ i dla pewnego $\varepsilon > 0$

$$O(x_0, \varepsilon) \subset D_f.$$

Niech, $x_0 \in D_f$ $O(x_0, \varepsilon) = S(x_0, \varepsilon) \cup \{x_0\}$.

Df1

Pomemy, $x_0 \in D_f$ f jest ciągła w x_0 , jeżeli

f jest stała na $S(x_0, \varepsilon)$, czyli $f \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g$

$$\text{głównie } g = f(x_0).$$

Df2, $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, jeżeli

$$\forall x_0 \in D_f \quad f \text{ jest ciągła w } x_0.$$

Tw1 (o f. ciągłych)

Funkcje elementarne są ciągłe w smierch dziedzinach

Tw2 Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$

ciągłe w x_0 .

Ntedy $f \pm g$, $f \cdot g$ są ciągłe w x_0

Jh' dodatkowo $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0, \varepsilon)$, to

$\frac{f}{g}$ jest ciągłe w x_0 .

Tw3 (o zbreniu f. ciągłych)

Bierzemy f, g i zakładamy, że istnieje

$D_h \ni x \longrightarrow h(x)$, gdzie

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in D_h \subset D_f$$

Ntedy $h = g \circ f$ i nazywamy złożeniem f z g

Mph' f p' ciągła w x_0 i

g ciągła w $y_0 = f(x_0)$, to

h p' ciągła w x_0 .

W szczególności, złożenie dwóch ~~in~~ funkcji
ciągłych p' funkcja ciągła.

Pr1. Niech $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

f p' złożeniem

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad \text{z} \quad f_2(y) = \sin y, \quad y \in \mathbb{R},$$

boatem $f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = f_2\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \sin y \Big|_{y=1/x} = \sin \frac{1}{x} = f(x).$$

f_1, f_2 są elementarne, więc ciągłe. Zatem

z Tw3 f p' ciągła w D_f , czyli dla $x \neq 0$.

Uwaga.

Nie wszystkie funkcje są ciągłe

P2.

Niech, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Bierny

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Dla jakiego $a \in \mathbb{R}$, f jest ciągła na $\mathbb{R}$?

P3. Wyznaczyć $\forall v_0 \in \mathbb{R}$, dla których f nie jest ciągła

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{|x - 1|} & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$