

Mat., Energ. W4

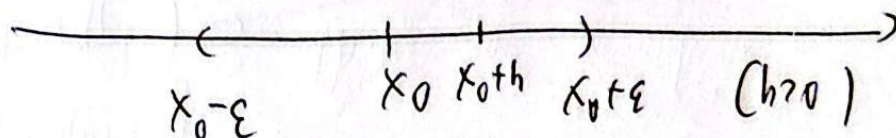
1. Wprowadzenie do rachunku różniczkowego.

1°. Wyrażenie różniczkowe i pochodna funkcji w punkcie.

Zakreślenie. $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ określona p.

na pewnym $O(x_0, \varepsilon) \subset D_f$.

Dla liczby $h \neq 0$, takiej, że $x_0 + h \in O(x_0, \varepsilon)$



Wtedy

$\Delta_{x_0} f(h) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + h) - f(x_0)$ - nazywamy
przyrostem wartości funkcji f
w pkt. x_0 dla przyrostu argumentu h .

h - przyrost argumentu.

Prowadzi to zdefiniowaniu funkcji

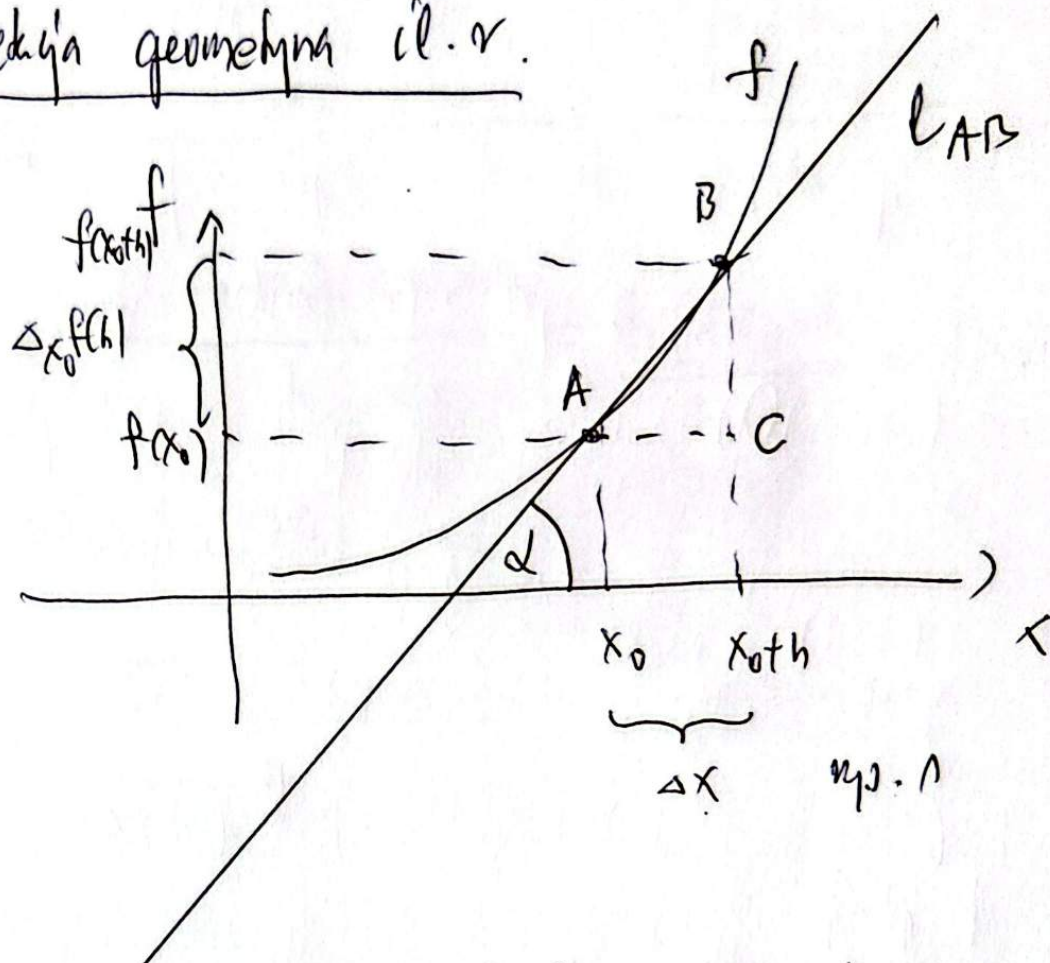
$$\textcircled{1} \quad h \xrightarrow{\Delta_{x_0} f(h)} \frac{\Delta_{x_0} f(h)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

Które nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f w pkt x_0
dla przyrostu argumentu h .

Uwaga.

Mozna oznaczyć $\Delta x = h$, gdzie $\Delta x = x - x_0$, $x \neq x_0$.

Interpretacja geometryczna il. r.



l_{AB} - prosta AB - siecna wyznaczona punktami A, B

α - kąt nachylenia l_{AB} do osi Ox

z $\triangle ABC$ mamy

(2)

$$\tan \alpha = \frac{\Delta_x f(h)}{h} = f'_{x_0}(h)$$

P1 . Napisz $i'_{x_0} f(h)$ dla

$$f(x) = x^2 \text{ w } x_0.$$

$$i'_{x_0} f(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \quad h \neq 0$$

$$= \frac{(x_0+h-x_0)(x_0+h+x_0)}{h} = \frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0+h$$

P2 . Napisz $i'_{x_0} f(h)$, gdzie

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Def 1 (pochodnej funkcji w punkcie)

Niech $h \rightarrow i'_{x_0} f(h)$, $h \neq 0$.

Jeśli funkcja ta ma granicę w $h_0 = 0$, to wartość tej granicy oznaczamy $f'(x_0)$ i nazywamy pochodną funkcji f w pkt. x_0 , czyli

$$(3) \quad i'_{x_0} f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0), \text{ albo}$$

$$(4) \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} i'_{x_0} f(h).$$

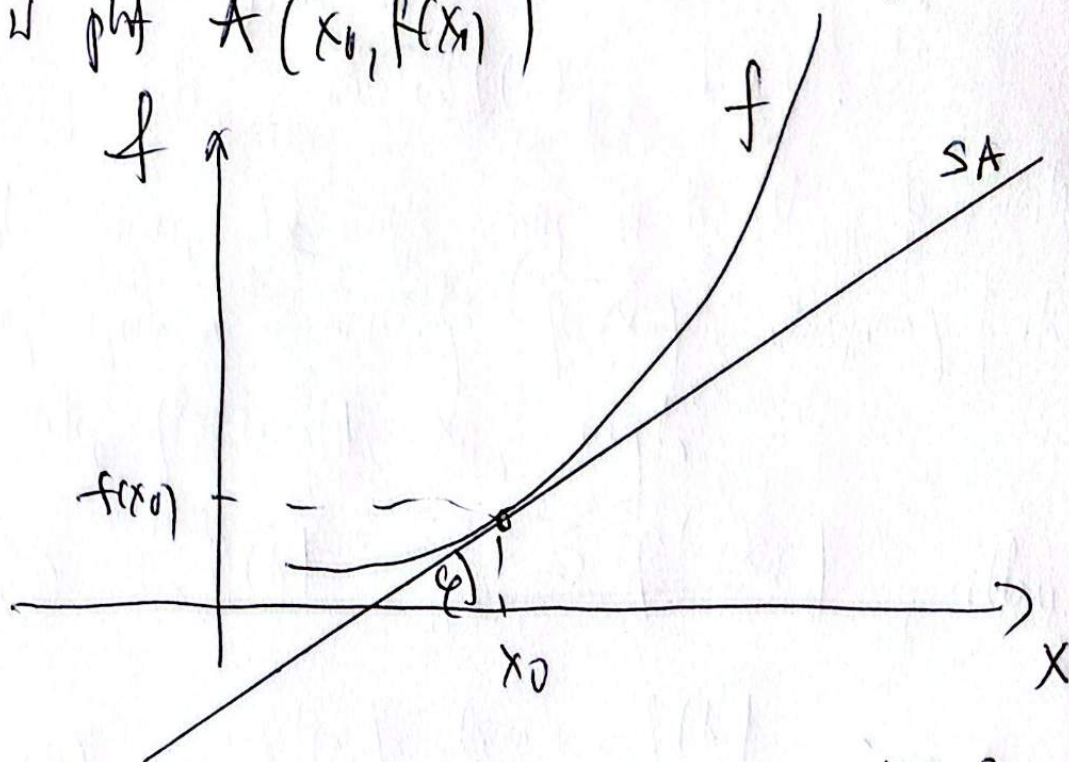
Uwaga.

Jeśli istnieje $f'(x_0)$ bieżący nazywamy też równocześnie dotknięciową punkt f w pkt x_0 .

Jeśli $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, D_f - przedział (a, b) i dotknięciowa w każdym $x_0 \in (a, b)$, to bieżący mówimy, że f jest dotknięciowa.

Interpretacja geometryczna pochodnej $f'(x_0)$

Istnieje twierdzenie o granicach, że istnieje „granice” pobrane sieć Δ_n (p. 11.1), które daje prostą nazywaną styczną do wykresu f w pkt $A(x_0, f(x_0))$.



2.11

Wtedy punkt S_A (styczna) nachylenia p pod kątem φ do osi Ox .

→ Długo

$$(5) \quad \boxed{\tan \varphi = f'(x_0)}$$

Ponadto S_A ma równanie:

$$(6) \quad \boxed{S_A: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

P3. Długo $f \in \mathcal{P}$.

$$\text{Wtedy } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

Długo r. stycznej w $(x_0, f(x_0))$:

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0).$$

$$\text{Np. } x_0 = 1$$

$$\underline{y - 1 = 2(x - 1)}$$

P.4.

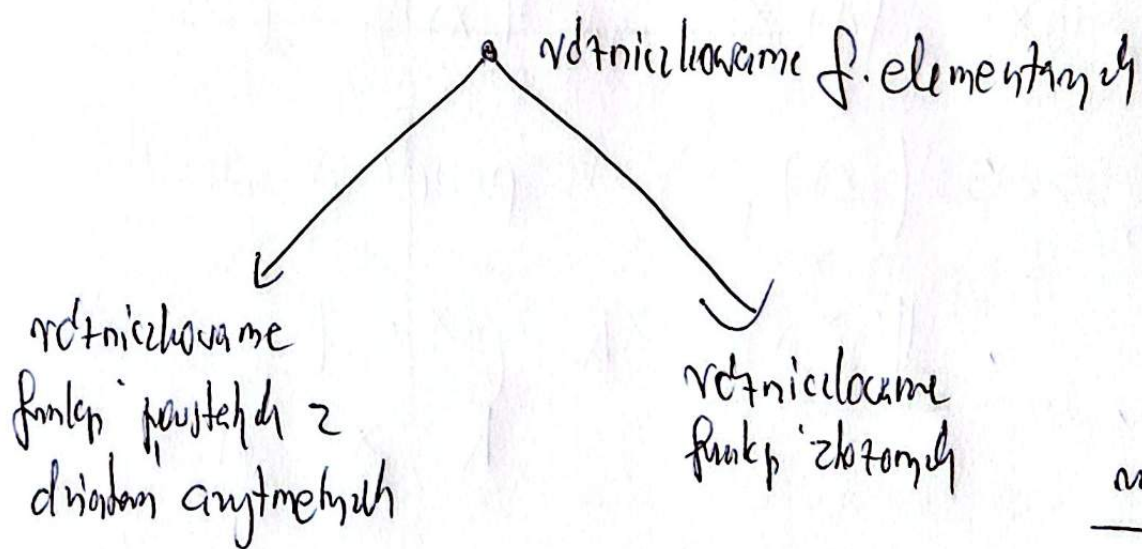
Napisać r. schemy dla $f \geq p, 2$.

Problem

Czy istnieje inny sposób obliczenia $f'(x_0)$ -
w „pewnym sensie” prostszy, aniżeli powyższy?

Odp. Tak, ten sposób nazywany jest rachunkiem
rdzniczkowym (rr).

(rr) jest rozwinięciem algorytmu, który schematycznie można przedstawić jak na odp. >.



odp. >

Uwaga ogólna do algorytmu

Dla f, f' danej funkcji

$$D_{f'} \ni x \longrightarrow f'(x), \text{ gdzie } D_{f'} \subset D_f$$

i f' nazywamy przyprowadzającą funkcją.

Wtedy $f'(x_0) = f'|_{x_0}$ daje pochodną f w pkt. x_0 .

Algorytm (r. r.) pokazuje, jak znaleźć f' ,
znając $f(x_0)$!

FAKT 1. (r. f. elementarnych)

f	f'
x^n	$nx^{n-1}, n \geq 1$
af	$af', a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
c	0 (f. stała)
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

np. dla $f(x) = \sqrt{x}$ mamy

$$f(x) = x^{1/2} \quad (\alpha = 1/2).$$

$$\text{Stąd } f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Wtedy, np.

$$f'(3) = (\sqrt{x})'|_{x=3} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=3} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{3}}}}.$$

dla $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$f'(x) = (x^{-1})' = -1 x^{-1-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$$

FAKT2.

Nich dane będą f, g różniczkowalne na zbiorze A .

Nadaj każdej z funkcji: $f+g, f-g, f \cdot g$

która jest różniczkowalna na A i zachodzi

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x), \quad x \in A$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad x \in A.$$

Jeli dadećmo $g(x) \neq 0, x \in A$, to

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad x \in A.$$

P5. Na $f(x) = x\sqrt{x}$ namu

$$f'(x) = (x\sqrt{x})' = (x)' \sqrt{x} + x(\sqrt{x})' =$$

$$\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad x > 0$$

P. 6. Skupite F_1, F_2 obliku f' , jeli $f =$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sin x}, \quad (x^7 + 5x^4 - 1) \ln x, \quad 5e^x - \frac{\lg x}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{\cos x}{2\sqrt{x} - 1}.$$

Składanie (superpozycja) funkcji.

Dane są dwie funkcje f, g .

Dla $x_0 \in D_f$, mamy

$$D_f \ni x_0 \longrightarrow y_0 = f(x_0) \in D_g$$

$$D_g \ni y_0 \longrightarrow g(y_0).$$

Wtedy zapisujemy

$$⑦ \quad g(y_0) = g \circ f(x_0) = g(f(x_0))$$

i' g nazywamy funkcją złożoną $f \circ g$,

f - f. wewnętrzna tego złożenia

g - f. zewnętrzna tego złożenia.

Pr. Złożyć funkcje $x \xrightarrow{f} x^2$ i' $x \xrightarrow{g} \sqrt{x}$
w kolejności $f \circ g$, $g \circ f$

(i) $f \circ g$.

Wiemy

$$x \longrightarrow y = g(x) = \sqrt{x}$$

$$y \longrightarrow f(y) = y^2 \Big|_{y=\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^2$$

Daher

$$f \circ g(x) = x, \quad x > 0$$

(ii) $g \circ f$

Teile man:

$$x \longrightarrow y = f(x) = x^2$$

$$y \longrightarrow g(y) = \sqrt{y} \mid_{y=x^2} = |x|$$

$$g \circ f(x) = |x|, \quad \underline{x \in \mathbb{R}}.$$

Zahn $f \circ g \neq g \circ f$ (!!!) (Mc p'première).

P8. Zwei ~~funk~~ f, g , $f \circ g, g \circ f$

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = e^x$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \ln x$$

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = 5x$$

7.9.

Dłonej funkcji

$$h(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}, \quad x \in D_h$$

Rozkładać h na prosta, czyli przedstawić

$$h = g \circ f.$$

Kwadrat. $x \longrightarrow x^2 - x + 1 = y = f(x)$

$$y \longrightarrow \sqrt{y} = g(y)$$

Wtedy $h = g \circ f$.

7.10 Dokonać rozkładu p. złożonych

$$e^{\sqrt{x}}, \quad \ln \sqrt{x^2 + 1}, \quad \sin 2^x, \quad e^{-\sqrt{3x}}$$