

T. Znaczenie rachunku różniczkowego w analizie matematycznej.

Zaczniemy od następującej uwagi:

$$\text{funkcja } f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

badamy na $S(x_0, \varepsilon)$ i $\mathcal{O}(x_0, \varepsilon)$, co prowadzi do:

(i) pojęcia granicy f w pkt x_0

(ii) ciągłości f w pkt x_0

(iii) różniczkowalności f w pkt x_0 .

FAKT 1. $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$,

ale nie na odwrót.

P1. Uzasadnić, że

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ma granicę w $x_0 = 0$, ale nie p. ciągła w $x_0 = 0$.

P2. Uzasadnić, że $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ p. ciągła w $x_0 = 0$,
ale nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

Podstawowe twierdzenie r.v.

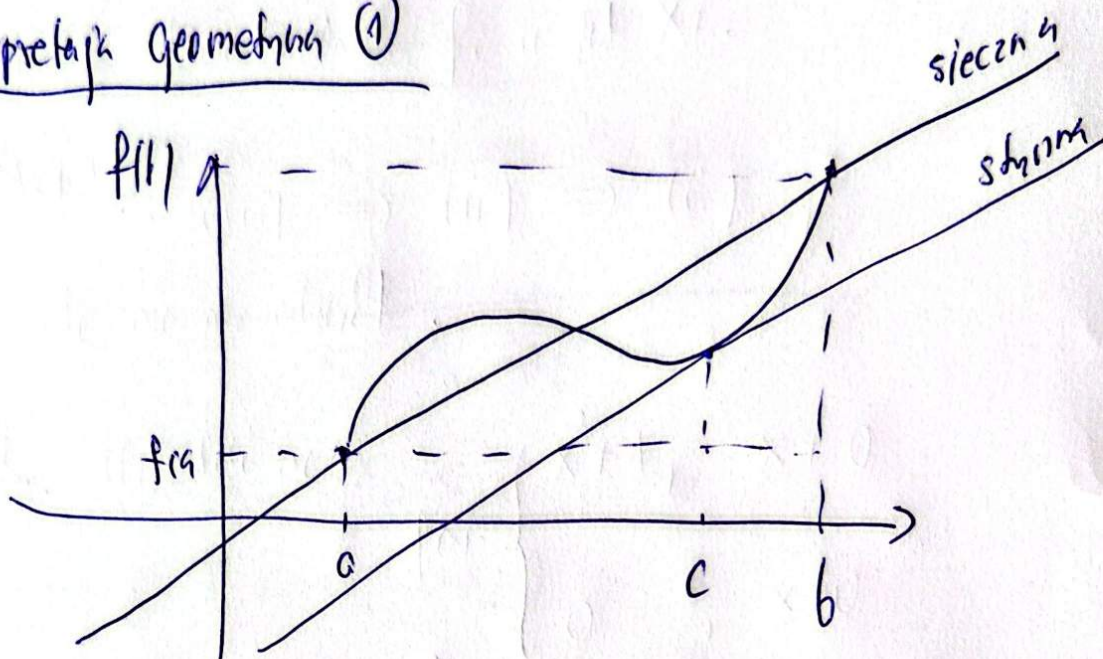
Tw. o wartości średniej Lagrange'a.

Zakreślenie. Niech f będzie ciągła na $[a, b]$ ($f \in C([a, b])$),
czy różniczkowalna na (a, b) .

Istnieje wtedy $c \in (a, b)$, że

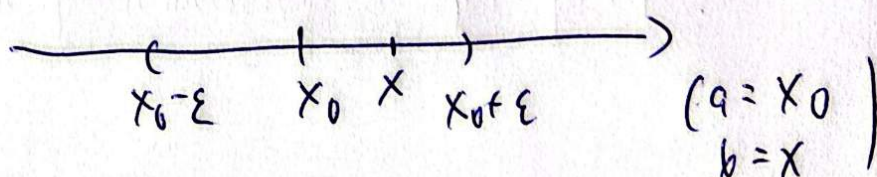
$$\textcircled{1} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interpretacja geometryczna $\textcircled{1}$



styczna || sieczna

Uwaga. $\textcircled{1}$ zapisany inaczej. Weźmy $x \in \mathcal{O}(x_0, \varepsilon) \mid x \neq x_0$



Wtedy z ① otrzymamy

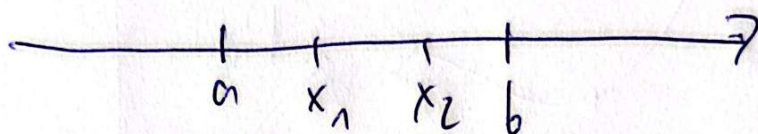
$$\textcircled{2} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c), \text{ dla p. } c \in (x_0, x) \quad (x > x_0)$$

Ala $x - x_0 = \Delta x$, zatem z ②

$$\textcircled{3} \quad \boxed{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \Delta x.}$$

Nr. 1 (monotoniczności funkcji)

Niech f będzie jedn. w zadanym tu. L.



Wtedy $a < x_1 < x_2 < b$.

Wtedy z ② ($x_0 = x_1$, $x = x_2$)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \text{ dla p. } c \in (x_1, x_2).$$

Jeśli na (a, b) $f' > 0$, to z powyższego

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \equiv f(x_2) > f(x_1)$$

Jeśli na (a, b) , $f' < 0$, to $f(x_2) < f(x_1)$.

Jeśli na (a, b) $f' = 0$, to $f(x_2) = f(x_1)$.

Mamy więc

Fakt 2. Jeśli na (a, b) f jest różniczkowalna oraz
ma stały znak, to

(i) $f > 0$, to f jest rosnąca

(ii) $f < 0$, to f jest malejąca

(iii) $f \equiv 0$, to f jest stała.

P3. Bierzemy $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Wtedy $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $x \neq 0$.

Tymczasem f nie jest malejąca.

Wyjaśnić dlaczego nie działa to, L.

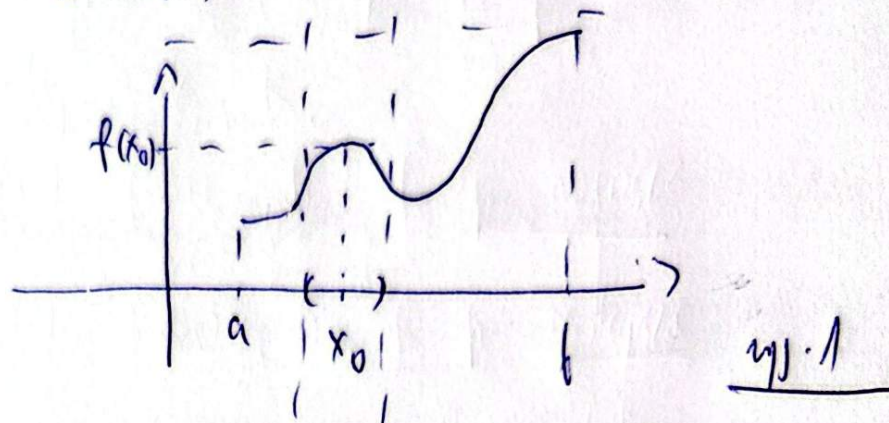
Ekstremum lokalne funkcji

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że f ma w $x_0 \in (a, b)$ ekstremum lokalne,
jeśli $\exists \varepsilon > 0$, że dla $\mathcal{O}(x_0, \varepsilon) \subset (a, b)$ mamy:

(i) w przypadku maksimum lokalnego

$$\forall x \in O(x_0, \varepsilon) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

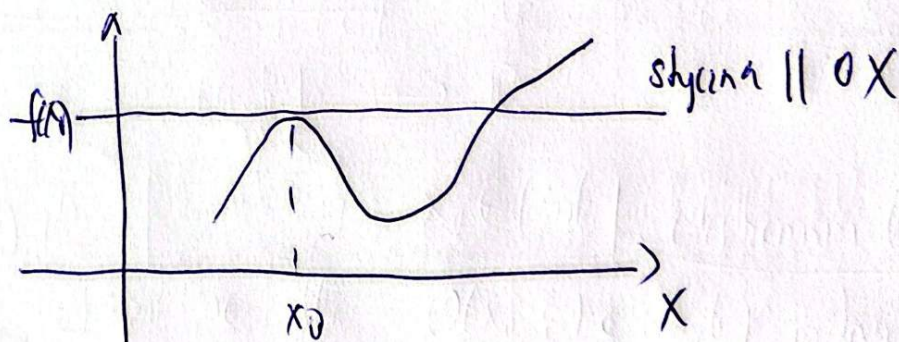


Zauważ, że w x_0 , f nie osiąga swojej wartości najmniejszej

(ii) minimum lokalne

$$\forall x \in O(x_0, \varepsilon) \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Fakt 3 . Jeśli na (a, b) f jest różniczkowalna i w $x_0 \in (a, b)$ osiąga swoje ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$



Ale nie na odwrót.

Ph. Niech $f(x) = x^3$, $x \in (-1, 1)$

Wtedy $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$, ale

w $x_0 = 0$ f nie ma ekstrem. lokalnych.

Dlatego:

Fakt - necessary WARUNKIEM KONIECZNYM istnienia ekstrem. lokal.
Ph. pokazujemy, że WK nie jest WARUNKIEM DOSTATECZNYM.

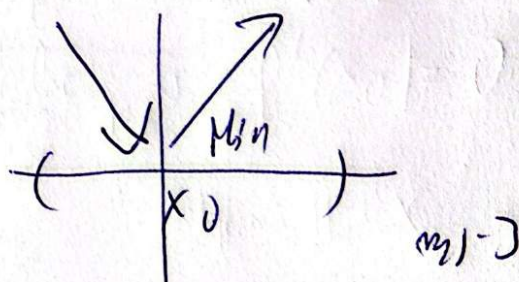
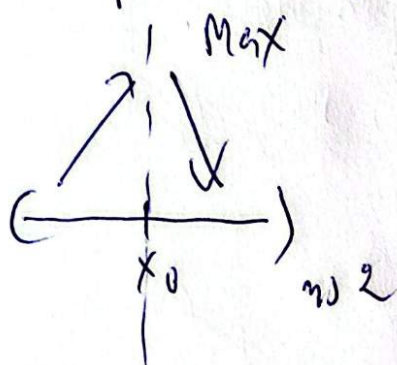
Fakt 4 (Warunek dostateczny)

Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ~~zdefiniowana~~ różniczkowalna

i dla $x_0 \in (a, b)$ $f'(x_0) \neq 0$.

Wtedy $\exists \varepsilon > 0$, że dla $O(x_0, \varepsilon) \subset (a, b)$

f zmienia swój charakter monotoniczny; czyli



to u x_0 f ma odpow. $\text{Max} = f(x_0)$, $\text{Min} = f(x_0)$.

PS. Nyznamy' elst. lokaln

$$f(x) = x^3 + \frac{x^4}{4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Kroki. Okreslay, w ktorych $x_0 \in \mathbb{R}$ f nie ma
ekstremum, biorąc porzutek $\equiv$ kompaty z
warunkiem koniecznego:

$$f'(x) = 3x^2 + x^3 = 0 \quad \equiv$$

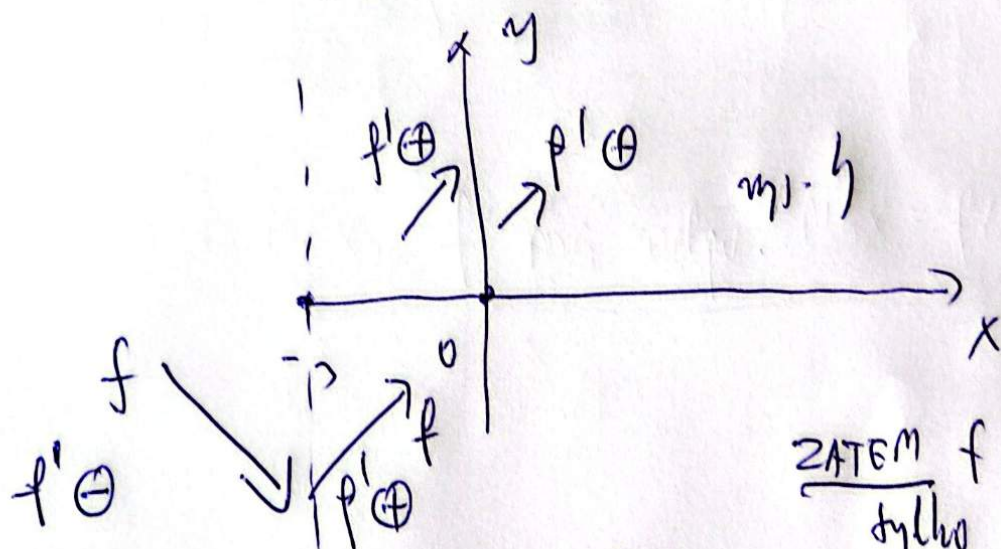
$$x^2(3+x) = 0 \quad \equiv$$

$$\underline{x \in \{-3, 0\}}$$

Wniosek. Tyłko w $x \in \{-3, 0\}$ f może
mieć elst. lokaln.

Krok 2. Skrepiemy warunek dostatek.

Najlepiej metoda geometryczna.



ZATEM f ma elst. l. (Min)
tyłko w $x_0 = -3$

P6 Napišite' elish. lokalne dla f , jeli

a) $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$, $x \in (-2, 2)$

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

Ekstrema globalne

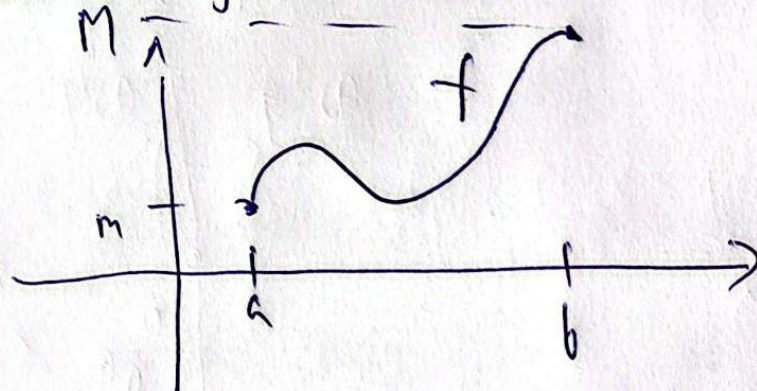
FAKTI. Kada $f \in C([a, b])$ ma vlastosti'

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b], \text{ u }$$

$$\forall x \in [a, b]$$

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$$

Ntun m - najmanja, M - najveća v. funkcije f
 $\equiv$ ekstrema globalne.



op. 5

Uwaga. Pw5 pokazuje, iż f osiąga swoje ekst. gl. na końcach przedziału.

Problem. Jak wyznaczyć $f(x_1) = m$ lub $f(x_2) = M$, kiedy $x_1, x_2 \in (a, b)$?

Rozwiązanie.

Dla $x \in (a, b)$ bierzemy warunkowe równanie
(*) $f'(x) = 0$.

Pomysłujemy, iż x_1, x_2 spełniają (*).

Bierzemy zbiór $A = \{a, b, x_1, x_2\}$
i obliczamy ~~f(A)~~.

$$f(A) = \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2)\}.$$

Ze zbioru $f(A)$ wybieramy najmniejszą liczbę m i największą M .

Np. jeśli $m = f(x_1)$, $M = f(b)$, to:

w x_1 ~~f~~ ma min gl., w b max gl..

7.7. Wyznaczyć ekstrem globalne dla f jest

$$f(x) = x^3 - x, \quad x \in [-1, 1]$$

Konstrukcja zbioru krytycznych

$$A = \{-1, 1\} \cup \{x \in (-1, 1) : f'(x) = 0\}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \subset (-1, 1)$$

Stąd $A = \{-1, 1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\}$

Wyznaczyć $f(A) = \{f(-1), f(1), f(-\frac{\sqrt{3}}{3}), f(\frac{\sqrt{3}}{3})\}$

z $f(A)$ wybieramy element najm. i najw.

zakończyć!

7.8 Znaleźć ekstrem globalne dla f

$$f(x) = x^2 \ln x, \quad x \in [1, e]$$

$$f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$