M.D. Informatyka — Konspekt do zajęć w trybie zdalnym zaplanowanych na dzień 18.03.2020.

<u>Temat</u>. Relacje i ich własności

<u>Przypomnienie</u>. Wiemy, że:

(i) przez <u>relację</u> R rozumiemy podzbiór iloczynu kartezjańskiego. Dokładniej, dla przypadku relacji 2-argumentowej mamy

$$R \subset A \times B, \quad \text{gdzie } A, B \subset X \text{ niepuste}$$

(ii) wtedy $(a,b) \in R \equiv aRb$ i czytamy

„$a \in A$ jest w relacji R z $b \in B$”

(iii) w sytuacji k-argumentowej relacji $(k > 2)$ mamy

$$R \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k .$$

Ale $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = A_1 \times (\underbrace{A_2 \times \ldots \times A_k}_{B}) = A_1 \times B$,

więc R można zawsze traktować jako relację 2-arg.

(iv) dla $R \subset A \times B$, biorąc

$$\tilde{A} = A \cup B = \tilde{B}, \quad \text{widzimy, że}$$

$$R \subset \tilde{A} \times \tilde{A} .$$

Dlatego dalej będziemy zakładali, że $R \subset A \times A$ dla pewnego $A \subset X$ i mówili, że „R zadana jest na zbiorze A”.

(v) $aRb \equiv b = R(a)$,

co daje podstawowy sposób generowania relacji R

$$b = R(a), \quad a \in A$$

(vi) istnieją inne sposoby przedstawiania relacji R:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] & G_R \arrow[r] \arrow[d] & A_R \arrow[ll, bend left] \arrow[d] \\ & \text{graf skierowany} & \text{macierz sąsiedztwa} \end{tikzcd}$$

(vii) wyróżnimy 4 podstawowe typy relacji: RZ, RS, RA, RP.
Na zajęciach omówiliśmy RZ, RS i RP.

RA: ~~dla~~ $R \subset A \times A$

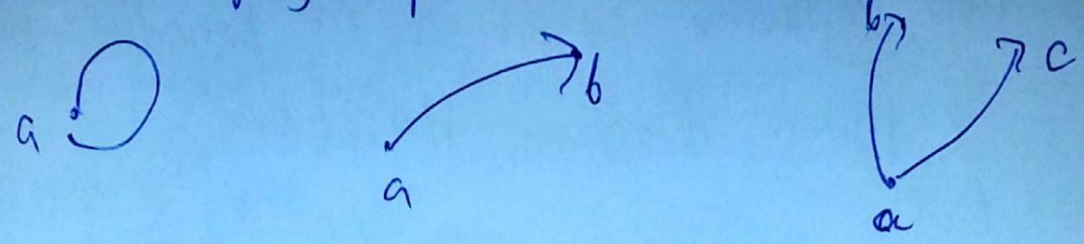
$$\forall_{a,b \in A} \; aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b.$$

Powyższą def. można zapisać równoważnie:

$$\forall_{a,b \in A} \; a \neq b \Rightarrow \neg(aRb) \vee \neg(bRa),$$

czyli jeśli prawdą jest, że $a \neq b$ oraz aRb, to prawdą jest, że $\neg(bRa)$.

Dlatego poniższe grafy reprezentują RA



<u>Przykłady</u>

Zad. 3.28: $R \subset A \times A$, gdzie $A = \{1,2,3,4\}$

określona jest następująco

$(*)$ $aRb \equiv |a-b| = 2$

Aby sprawdzić, które z własności (RZ, RS, RA, RP) posiada R wyznaczmy R, czyli podajmy jej opis mnogościowy:

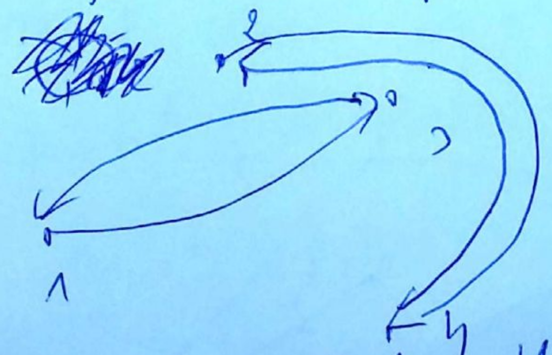
$(*)$ oznacza, że $|R(a) - a| = 2 \equiv R(a) - a = \pm 2$

$R(a) = a \pm 2, \quad a \in A$

Dlatego

$$R = \{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2)\}.$$

Jej graf G_R może mieć postać



Dlatego: R nie jest RZ (brak pętli)

R jest symetryczna (RS)

R nie jest antysymetryczna (RA)

R nie jest przechodnia — proszę to uzasadnić.

Nadto jest przykład, który A nie jest skończony, itp.

Zad. 2.2.9 pkt 1

$R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(x,y) \in R \equiv 2 | (x+y)$

Z zasady podzielności wynika, że

$(x,y) \in R \equiv x+y = 2m$, dla pewnego $m \in \mathbb{N}$

co oznacza, że $x+y$ jest liczbą parzystą.

Ponieważ suma l. nieparzystej i parzystej jest l. nieparz. Oraz suma dwóch parzystych jest parzysta, to

$(x,y) \in R \equiv$ (x nieparzyste $\Rightarrow$ y nieparzyste) lub
(x parzyste $\Rightarrow$ y parzyste)

W szczególności xRx, co oznacza, że R jest RZ.

Z pomocą, $xRy \Rightarrow yRx$ (bo dodawanie jest przemienne!), dlatego R jest RS.

R nie jest RA (UZASADNIĆ).

R jest RP (UZASADNIĆ)

Działania na relacjach

Niech $R_1, R_2 \subset A \times A$. Wtedy

$R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$ są przykładami działań mnogościowych na relacjach.

Istnieją jeszcze inne działania:

(i) $R^{\leftarrow}$ odwracanie relacji, gdy dla danej $R \subset A \times A$

$$a R^{\leftarrow} b \equiv b R a$$

(ii) składanie relacji, gdy dla danych $R_1, R_2 \subset A \times A$

$R_2 \circ R_1 \subset A \times A$ taka, że

$$\forall_{a,b \in A} \; a (R_2 \circ R_1) b \equiv \exists_{c \in A} \; a R_1 c \wedge c R_2 b$$

Przykłady

Zad 3.2.7 Dane są $R_1, R_2 \subset X \times X$, $X = \{1,2,3\}$

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$, $R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$.

Wyznacz: $R_2 \circ R_1$ oraz $R_1 \circ R_2$

Bierzemy kolejno

1: $1 R_1 1 \wedge 1 R_2 2 \Rightarrow 1 (R_2 \circ R_1) 2$

$1 R_1 2 \wedge 2 R_2 3 \Rightarrow 1 (R_2 \circ R_1) 3$

2: $2 R_1 3 \wedge 3 R_2 1 \Rightarrow 2 (R_2 \circ R_1) 1$

3: 3 nie jest w R_1 z żadnym

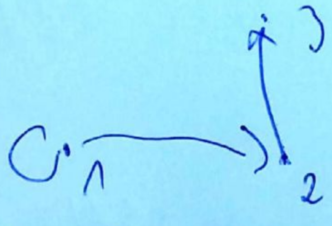
Dlatego $R_2 \circ R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,1)\}$

Proszę podobnie wyznaczyć $R_1 \circ R_2$.

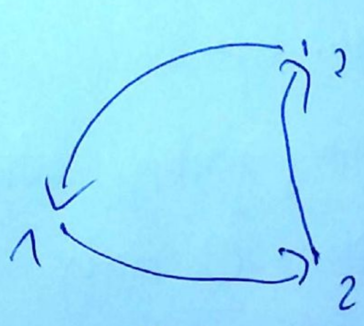
Czy działanie ~~$R_2 \circ R_1$~~ składania relacji jest przemienne?

Zad. 3.2.11 $R_1, R_2 \subset X \times X$, $X = \{1,2,3\}$

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3)\}$, $R_2 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$



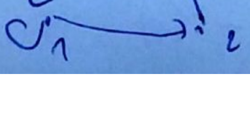
G_{R_1}



G_{R_2}

$R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1)\}$

Wtedy $G_{R_1 \cup R_2}$ powstaje ze scalenia G_{R_1} i G_{R_2}, czyli



Dwa ważne rodzaje relacji:

Pojęcie częściowego porządku: Każdą $R \subset A \times A$, która ma co najmniej własności typu: (RZ), (RA), (RP) nazywamy częściowym porządkiem.

Wtedy aRb zapisujemy $a \preccurlyeq_A b$, a obiekt $(A, \preccurlyeq_A)$ nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym.

Przykład 1. $A = \mathbb{R}$, z relacją $\leq$ jest przykładem takiej struktury. Stąd oznaczenie $\preccurlyeq$.

2°. $A = P(X)$ – rodzina wszystkich podzbiorów X, z relacją $\subseteq$

$$A \subseteq B \equiv (A = B \vee A \subset B)$$

Zauważmy, że:

w p. 1 każde dwie liczby r_1, r_2 są ze sobą w relacji $\leq$, natomiast w P2 już tak nie jest.

Jeśli $(A, \leq_A)$ i

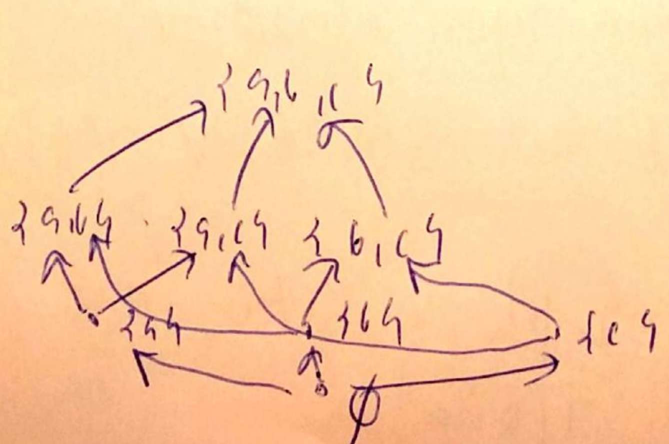
$$\forall_{a,b \in A} \quad a \leq_A b \ \underline{\text{lub}} \ b \leq_A a,$$

to mówimy, że $(A, \leq_A)$ jest porządkiem liniowym.

Przykład 2.

Niech $X = \{a,b,c\}$ i weźmy relację $\subseteq$ na $A = P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Jej graf wygląda następująco (pominęliśmy krawędzie potwierdzające przechodniość i zwrotność!)



Także rysujemy graf r. cz. ponadto przechodzi do pojęcia diagramu HASSEGO.

Czyli:

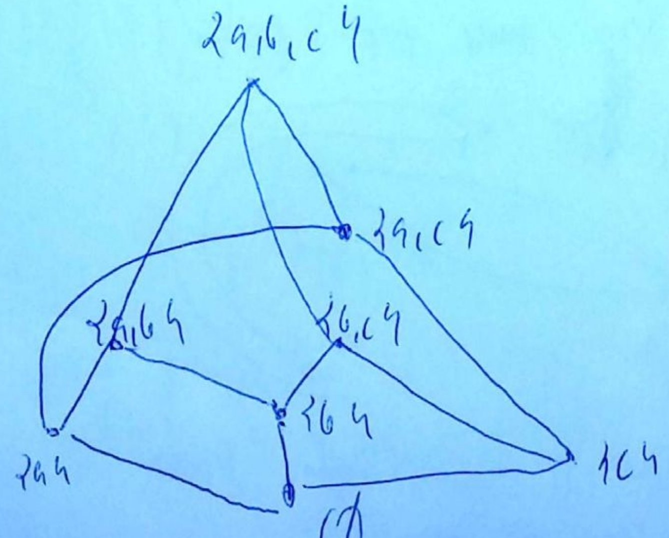
(i) pomijamy pętle

(ii) krawędzie potwierdzające przechodniość,

(iii) rezygnujemy z krawędzi skierowanych, natomiast jeśli $a \leq_A b$, to a zaznaczamy niżej aniżeli b

$$\begin{array}{c} b \\ | \\ a \end{array}$$

Zatem dla przykładu wyżej mamy:



Zad 3.2.20.

$R \subset A \times A$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$\forall_{x,y \in A} \; xRy \iff x | y$

Wyznaczmy R: z def. R $\; xRy \equiv \exists_{k \in \mathbb{N}} \; y = kx$,

co pozwala nam generować R

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (1,8), (1,12), (1,24),$$
$$(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), (2,24),$$
$$(3,3), (3,6), (3,12), (3,24),$$
$$(4,4), (4,8), (4,12), (4,24)$$
$$(6,6), (6,12), (6,24),$$
$$(8,8), (8,24),$$
$$(12,12), (12,24),$$
$$(24,24)\}$$

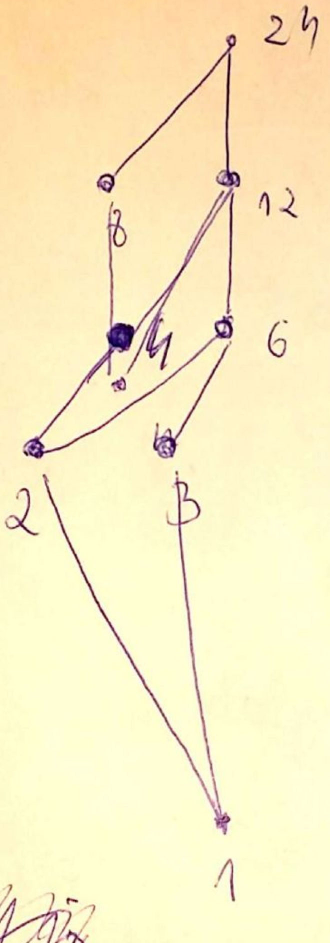
Co pokazuje, że R jest typu RZ.

Zauważmy, że poza przypadkami (k,k), nie mamy efektu symetrii. Dlatego R jest typu RA.

R jest relacją porządku (PROSZĘ TO UZASADNIĆ).

Zatem $(A, R) = (A, \preccurlyeq_A)$.

Narysujmy jej graf Hassego.



Drugim ważnym ~~typem~~ rodzajem relacji jest RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI, czyli $R \subset A \times A$ o własnościach:

RZ & RS & RP.

Podstawowa własność tej relacji nazywa się ZASADĄ ABSTRAKCJI (ZA)

(ZA). Niech $R \subset A \times A$ będzie r. równoważności. Dla każdego $a \in A$ definiujemy:

$$[a]_R = \{b \in A : bRa\}$$ – klasa abstrakcji elementu a.

Wtedy:
(i) $aRb \equiv [a]_R = [b]_R$

(ii) $\neg(aRb) \equiv [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

(iii) A jest sumą elementów rodziny parami rozłącznych będących klasami abstrakcji.

Przykład:

$A = \mathbb{Z}$, $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$nRm \equiv 2 \mid (n-m)$$

Łatwo wykazać, że R jest (RZ), (RS) i (RP).

Wyznaczymy podział odpowiadający R:

Dla 0 mamy: każda parzysta i tylko parzysta jest w relacji z 0, stąd $[0]_R = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Dla 1 mamy: każda nieparzysta i tylko nieparzysta jest w relacji z 1, stąd $[1]_R = \{2k+1,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Dlatego $\mathbb{Z} = [0]_R \cup [1]_R$ – jest to podział.

Zad. 3.2.24.

Niech $A \subset X$, $A \neq \emptyset$

Definiuję $R \subset A \times A$

$$aRb \equiv a = b$$

Zauważmy, że R jest typu RZ, RS, RA i RP

zatem jest częściowym porządkiem oraz r. równoważności.

Wtedy $a \in A \Rightarrow [a]_R = \{a\}$

Jeśli np. $A = \{a, b, c\}$, to jej diagram Hassego ma postać