

-1-

MD - zopis'a zaplanowan na 1.04
CZ2 - Kontynuacja zopisu z 25.03.

Temat Liczby Stirlinga 2-go rodzaju

Nch $|X|=n$, $1 \leq k \leq n$ i oznaczmy przez
 $\mathcal{A}$ - rodzinę wszystkich k -element, partycji zb. X .

Oczyw. $P \in \mathcal{A} \equiv P = \{A_1, \dots, A_k\} :$
 $A_i \cap A_j = \emptyset, (i \neq j)$
 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = X.$

Nhcy $|\mathcal{A}| = S(n, k).$

Twierdzenie $\forall 1 \leq k \leq n$

$$(*) \quad S(n, k) = S(n-1, k-1) + k S(n-1, k)$$

Ponadto, uprost z def.

$$S(n, n) = S(n, 1) = 1, \quad n \geq 1$$

Przemy 1 (zad. 4.2.20)

Oblizy $S(n, 2), n \geq 2.$

Mozemy zaklady, n $n \geq 2.$

Z (*) mamy:

$$S(n, 2) = S(n-1, 1) + 2 S(n-1, 2),$$

czyli

- 2 -

$$S(n, 2) = 1 + 2S(n-1, 2) \quad , \quad \underline{n \geq 2}$$

Oznaczmy na chyb $a_n = S(n, 2)$, $n \geq 2$

Wtedy $a_2 = S(2, 2) = 1$ oraz dla $n \geq 3$

$$a_n = 1 + 2a_{n-1}$$

Alte wtedy

$$a_{n-1} = 1 + 2a_{n-2}$$

$$a_{n-2} = 1 + 2a_{n-3}$$

$\vdots$

$$a_{n-(n-3)} = 1 + 2a_2$$

" 3

Stąd

$$a_n = 1 + 2(1 + 2(1 + 2(1 + \dots + 1 + 2a_2)))$$

Np. $a_5 = 1 + 2a_4 = 1 + 2(1 + 2a_3) =$

$$= 1 + 2(1 + 2(1 + 2a_2)) =$$

$$1 + 2(1 + 2(1 + 2)) = \underbrace{1 + 2 + 2^2 + 2^3}_{\text{postup geometryczny}}$$

$$a_5 = \frac{1-2^5}{1-2} = 2^5 - 1$$

logdla $a_n = 2^{n-1} - 1$, czyli $\underline{S(n, 2) = 2^{n-1} - 1}$

Problem 2 (rad. 4.2.21)

Pokazuj, że $S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} \quad n \geq 4$

Zachowuj zasady indukcji matematycznej (ZIM):

1^o. (krok inicjujący) $n=4$

$$S(4, 2) \stackrel{\text{Problem 1}}{=} 2^3 - 1 = 7$$

$$\binom{4}{3} + 3\binom{4}{4} = 4 + 3 = 7$$

2^o. Zabrać indukcyjnie

dla $n \geq 4 \quad S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$

Krok indukcyjny:

$$S(n+1, n-1) = \binom{n+1}{3} + 3\binom{n+1}{4}$$

Dowód:

$$S(n+1, n-1) \stackrel{(*)}{=} S(n, n-2) + (n-1)S(n, n-1) \stackrel{\text{ZIM}}{=}$$

$$\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} + (n-1)S(n, n-1)$$

Albo

$$S(n, n-1) \stackrel{(*)}{=} S(n-1, n-2) + (n-1)S(n-1, n-1)$$

$$= S(n-1, n-2) + n-1 \stackrel{(*)}{=} S(n-2, n-3) + (n-2) + (n-1)$$

$$= \dots = 1 + 2 + \dots + n-1 = \frac{1+n-1}{2}(n-1) = \underline{\underline{\frac{n}{2}(n-1)}}$$

-4-

Długo

$$S(n+1, n-1) = \binom{n}{3} + 3\binom{n+1}{4} + \frac{n}{2}(n-1)^2$$

Wystarczy pokazać, że

$$\binom{n}{3} + 3\binom{n+1}{4} + \frac{n}{2}(n-1)^2 = \binom{n+1}{3} + 3\binom{n+1}{4}$$

co zostaniemy z ANSTUV!

Punkt 3 (rad. 4.2.22)

Uzasadnij, że $S(n, 3) > 3^{n-2}$ dla $n \geq 6$.

Dowód. Ponownie skorzystaj z IM:

$$1^0. n=6: S(6, 3) \stackrel{IM}{=} S(5, 2) + 3S(5, 3)$$

$$= 2^4 - 1 + 3(S(4, 2) + 3S(4, 3))$$

$$= 2^4 - 1 + 3S(4, 2) + 3^2 S(4, 3) =$$

$$= 2^4 - 1 + 3(2^3 - 1) + 3^2 (S(3, 2) + 3S(3, 3))$$

$$= 2^4 - 1 + 3 \cdot 2^3 - 3 + 3^2 (2^2 - 1 + 3)$$

$$= 2^4 - 1 + 3 \cdot 2^3 - 3 + 3^2 \cdot 2^2 - 3^2 + 3^3 = 94$$

$$3^{6-2} = 3^4 = 81, \text{ co pokazuje, że}$$

$$S(6, 3) > 3^{6-2}$$

-5-

Krok indukcyjny:

$$S(n+1, 3) > 3^{n-1} :$$

$$S(n+1, 3) \stackrel{(*)}{=} S(n, 2) + 3S(n, 3)$$

$\parallel$
 $2^{n-1} - 1$

Ah z z poprzednich ind.

$$S(n, 3) > 3^{n-2}, \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} S(n+1, 3) &> 2^{n-1} - 1 + 3 \cdot 3^{n-2} = \\ &= 2^{n-1} - 1 + 3^{n-1} \end{aligned}$$

~~Ah $2^{n-1} - 1 > 1$ dla $n \geq 6$ m.~~

~~$S(n+1, 3) > 3^{n-1} + 2^{n-1} - 1$~~

Wskazy polecamy, u

$$2^{n-1} - 1 + 3^{n-1} \geq 3^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} > \frac{1}{3^{n-1}} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2^{n-1} - 1}{3^{n-1}} > \frac{2}{3} \text{ . Prawdopodobnie!}$$

Temat. Wstęp do permutacji.

Nch $|X| = n$. Każdą funkcję $f: X \xrightarrow{n \rightarrow n} X$

będą nazywać permutacją zbioru X .

Zbiór wszystkich permutacji zbioru X oznaczamy przez $P_n(X)$.

Pr. 1. Nch $X = \{a, b, c\}$. Nch $f \in P_3(X)$

mamy przedstawić w postaci

$$\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline f(a) & f(b) & f(c) \end{array}, \text{ np. } \begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline a & b & c \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline b & c & a \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline c & a & b \end{array}$$

są przykładami

takich permutacji.

I ogólnie, dla $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, to

$f \in P_n$ będą przedstawić w postaci

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Można inaczej, np.} \\ (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \end{array} \right)$$

Pr. 2. Zbiór $P_n(X)$. Każdą $f \in P_n(X)$

mamy przedstawić jak wyżej. Pomocnik:

miej x_1 mogą obierać na n -sposobów, x_2 na $n-1$

Istnieją X_n na $\mathbb{A}^1$, z związki wielomianów
 mających $|P_n(X)| = n(n-1)(n-2)\dots 1$.

Długość linki g oznaczmy m' , zatem $|P_n(X)| = m'$.

Zbiór $P_n(X)$ wyposażamy w strukturę algebraiczną
 na której składają się m' :

a) działanie potęg

$$P_n(X) \times P_n(X) \xrightarrow{\circ} h \in P_n(X), \text{ gdzie}$$

$$h = f \circ g \text{ nazywamy "złożeniem",}$$

$$\text{gdzie } h(x_k) = f(g(x_k)), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

b) szeregi permutacji oznaczamy przez

$$e: X \rightarrow X$$

$$e(x_k) = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

czyli określone identycznie.

Zauważmy, że struktura $(P_n(X), \circ, e)$ ma własności:

$$(i) \quad \forall f \in P_n(X) \exists g \in P_n(X) \quad f \circ g = g \circ f = e$$

Wtedy g oznaczamy f^{-1} , nazywamy permutacją
odwrotną do f

-8-

(ii) $\forall f \in P_n(X) \quad f \circ e = e \circ f = f$

Z_{40} powder sticking to nazywa grupa.

P_3 . Nieraz $X = \{1, 2, 3\}$.

Jaka jest $P_3(X)$ i ile elementów $3! = 6$ -elementowa.

$e: \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}$. Nieraz $f: \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array}$

Nieraz $f^{-1}: \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array}$.

Nieraz $g: \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}$

Oblig $f \circ g: \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 2 & 1 & 3 & \\ \hline 2 & 3 & 1 & \end{array} \left. \begin{array}{l} g \\ f \end{array} \right\}$

$g \circ f: \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \end{array}$

$g \circ f: \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \end{array} \left. \begin{array}{l} f \\ g \end{array} \right\}$ $g \circ f: \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \end{array}$

-9-

Zatem $f \circ g \neq g \circ f$.

Zgadziło to nazwy "nieprzemienneści" "grupy" $P_n(X)$.

Nach $f \in P_n(X)$. Jeśli $\exists x_k \in X$

$f(x_k) = x_k$, to x_k nazywamy punktem
stałym f

Jeśli f nie ma punktu stałego, to f nazywamy
cyklem

Pr. Nach f :

1	2	3	4
4	3	2	1

Oczywiście f nie ma punktu stałego (i cyklu).

Wemy dno "pomocnicze" permutacje:

f_1 :

1	4
4	1

f_2 :

2	3
3	2

Dokonyamy ich rozróżnienie: $f_1 \rightarrow \tilde{f}_1, f_2 \rightarrow \tilde{f}_2$,
gdzie

$\tilde{f}_1$:

1	2	3	4
4	2	3	1

rozróżnienie

$\tilde{f}_2$:

1	2	3	4
1	3	2	4

rozróżnienie

40~

Wemy znowe op.

$$\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 : \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{array} \right.$$

czyli $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 = f$

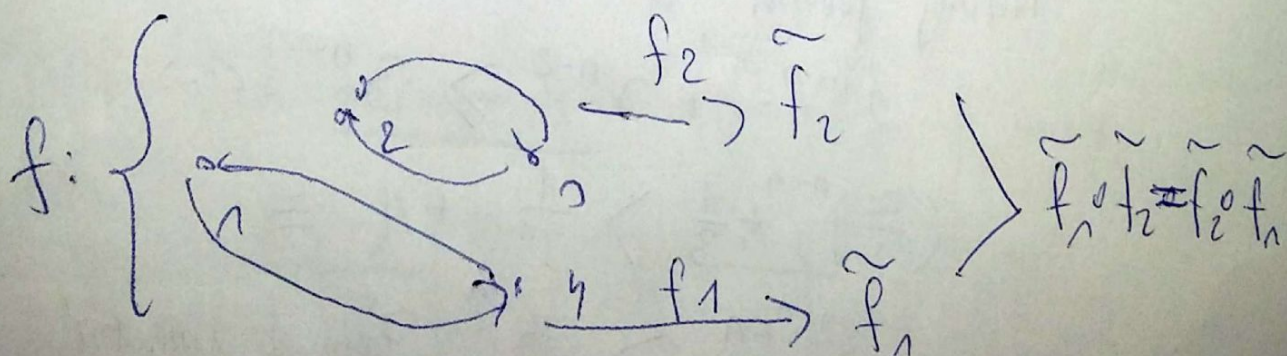
$$\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2 : \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 3 & 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_1 \end{array} \right.$$

$\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2 = f$, czyli

$\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2 = \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 = f$ (proste)

Mówiąc dalej, f rozkłada się na cykle rosterne

Uwaga. Oczywiście f jest relacją, zatem ma swój graf skierowany, m.



Wzły km

$$f: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 1 & 4 & 7 & 8 & 6 & 3 \end{array}$$

Teraz $f(4)=4$, zatem f ma p'cyklem.

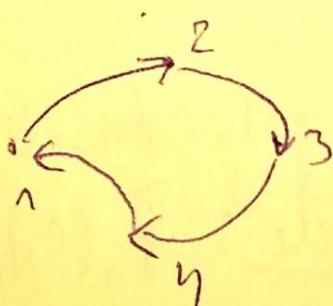
Wzły pozostałych pomocniczych $\tilde{f}$ postać

$$\tilde{f} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 & 3 \end{array}$$

Wzły, jak wzły, f p' rozróżnieniu $\tilde{f}$, która p' cyklem.

Zatem f nie p' cyklem, ale rozróżnieniem cyklem.

Następnie, mamy

$$f: \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \quad 1 \text{ cykl}$$


f ma nie prosty składowy ~~nie~~ zatem p' cyklem i jest nie rozkładalną ni prostą.

Pomóż przykłady wyzerowanej grupy matematycznej - Many

Tv. Każda permutacja p albo:

- ma zerowany cykl (ma pkt. staly)
- albo cyklami pojedynczymi
- albo ma rozkład na cykle rozłączne.

Przykład.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f :	2	3	1	7	6	5	4	8	10	9

$f(8) = 8$ zatem p ma zerowy cykl

$\tilde{f}$	1	2	3	4	5	6	7	9	10
	2	3	1	7	6	5	4	10	9

Zauważ, że $\tilde{f}$ rozkłada się na cykle proste

c_1 :	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	1	2	3	2	3	1	c_2 :	<table><tr><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>7</td><td>4</td></tr></table>	4	7	7	4	c_3 :	<table><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td></tr></table>	5	6	6	5	c_4 :	<table><tr><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>10</td><td>8</td></tr></table>	8	10	10	8
1	2	3																							
2	3	1																							
4	7																								
7	4																								
5	6																								
6	5																								
8	10																								
10	8																								

Many

$\tilde{f}_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	3	1	4	5	6	7	8	9	10

-17-

$$\tilde{f}_2:$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	7	5	6	4	8	9	10

$$\tilde{f}_3:$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	6	5	7	8	9	10

$$\tilde{f}_4:$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	10	9

Wemy op. $\tilde{f}_4 \circ \tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1$

$$f$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	1	4	5	6	7	8	9	10
2	3	1	7	5	6	4	8	9	10
2	3	1	7	6	5	4	8	9	10
2	3	1	7	6	5	4	8	10	9

$$f_1, f_2, f_3, f_4$$

zahr dosky f , co potvrdzuje, a f
ma rozklad na cikle: $\tilde{f}_1(c_1), \tilde{f}_2(c_2),$
 $\tilde{f}_3(c_3), \tilde{f}_4(c_4)$.