

M.D. - dzień zaplanowany na 8.04.

Temat: Lekcja 6 - symbol Newtona - Pascala i jego własności
- zastosowania w metodach zliniarskich

Pamiętajmy: 1) symbol $\binom{m}{k}$, $0 \leq k \leq m$
oznaczyłby $\frac{m!}{k!(m-k)!}$

2) Jeśli $|X| = m$ i wiemy, że

$$e_k = \{A \subset X : |A| = k\}, \quad 0 \leq k \leq m,$$

$$\text{to } |e_k| = \binom{m}{k}$$

Pomysł: wiemy, że e_k i e_{m-k} są równoliczne,

$$\text{czyli } |e_k| = |e_{m-k}|, \text{ co oznacza, że}$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}.$$

3) Wiemy, że rodzina podzbiórów $P(X)$ ma następującą strukturę:

$$P(X) = e_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_m.$$

Zatem z zasady addytywności

$$|P(X)| = |e_0| + |e_1| + \dots + |e_m|, \text{ czyli}$$

$$2^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}$$

Ind

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

1 ogólnie (z użyciem twierdzenia Newtona)

$\forall$ $\forall$
 $a, b \in \mathbb{R} \quad n \geq 0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Inne własności:

4.2.2. $\forall \quad \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$
 $1 \leq r \leq n$

Twierdzenie Pokazujemy korzystając z def. symbolu $N-P$, że
 Lewa strona = prawa strona.
 Proszę do zrobienia!

Metoda - Zastosujemy techniczny metod zliczania.

Wzłommy zbiór $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, $|X| = n+1$.
 Ustalamy $1 \leq v \leq n$ i wybieramy z X jeden element,
 np. x_1 .

Natomiast $C_v(X)$ - liczba wszystkich v -el. podzb. X .

Zauważmy, że

→

$$\mathcal{L}_v(X) = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, \text{ gdzie}$$

$$A \in \mathcal{L}_1 \equiv A \in \mathcal{L}_v(X) \text{ i } x_1 \in A$$

$$A \in \mathcal{L}_2 \equiv A \in \mathcal{L}_v(X) \text{ i } x_1 \notin A.$$

z zasady addytywności.

$$|\mathcal{L}_v(X)| = |\mathcal{L}_1| + |\mathcal{L}_2|. \quad (*)$$

$$\text{At} \quad A \in \mathcal{L}_1 \equiv A = \{x_1\} \cup \tilde{A}, \text{ gdzie}$$

$$\tilde{A} \subset X \setminus \{x_1\} \text{ i } |\tilde{A}| = n-1$$

Możemy więc zredukować

$$\mathcal{L}_1 \ni A \longleftrightarrow \tilde{A} \in \mathcal{L}_{n-1}(X \setminus \{x_1\}),$$

$$\text{skąd} \quad |\mathcal{L}_1| = |\mathcal{L}_{n-1}(X \setminus \{x_1\})| = \binom{n}{n-1}$$

$$\text{Podobnie} \quad A \in \mathcal{L}_2 \equiv A \subset X \setminus \{x_1\} \text{ i } |A| = n,$$

$$\text{czyli} \quad |\mathcal{L}_2| = |\mathcal{L}_n(X \setminus \{x_1\})| = \binom{n}{n}.$$

Długość 2 (*)

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{n-r} + \binom{n}{r}$$

-4-

Zad. 4.2.4 zostawiam do samodzielnego rozwiązania.

Wzrost 4.2.3

$$\forall \quad 0 \leq k \leq j \leq i \quad \underbrace{\binom{i}{j} \binom{j}{k}}_L = \underbrace{\binom{i}{k} \binom{i-k}{j-k}}_P$$

Pokażmy, że $P = L$:

$$\begin{aligned} P &= \frac{i!}{k! (i-k)!} \cdot \frac{(i-k)!}{(j-k)! (i-k-(j-k))!} = \\ &= \frac{i!}{k! (j-k)! (i-j)!} = \\ &= \frac{i!}{(i-j)! j!} \cdot \frac{j!}{k! (j-k)!} = \binom{i}{j} \binom{j}{k} = P \end{aligned}$$

4.2.5. Zauważmy, że

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \quad \begin{array}{l} \text{wzrost dwumiany} \\ = \\ a = -1 \\ b = 1 \end{array}$$

$$(-1+1)^m = \underline{\underline{0}}.$$

Uwaga.

Prezentacja wyżej problematyki ma swoje ilustracje w postaci tzn. **TRÓJKĄTA PASCALA**.

K						2^K (suma wierszy)
0			1			2^0
1			1	1		2^1
2		1	2	1		2^2
3		1	3	3	1	2^3

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{n-1}$	$\binom{n}{n}$	2^n

suma k-ty wiersz = 2^k

Jeli z k-ty wiersz wybieramy dwie sąsiadujące
liczby $\binom{k}{i}$, $\binom{k}{i+1}$, to

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1},$$

a to wiadomo w zad. 4.2.2.!

Wtedy do nich złączmy.

4.2.12.

Nach Bin_{16} - zbiór wszystkich ciągów
długości 16

$$b \in \text{Bin}_{16} \equiv b = (b_1, b_2, \dots, b_{16}), \\ b_j \in \{0, 1\}$$

Nach A będą obrazy następujące:

$$a \in A \equiv a \in \text{Bin}_{16} \text{ oraz}$$

$$\#\{1 \leq j \leq 16 : a_j = 0\} = 8$$

Zbiór A

Ustalamy kilka faktów, które można znaleźć u
zastępczym opracowaniu o metodach złączonych.

Ważny dla zbioru: Bin_n i $P(X)$, gdzie

Zbiór X jest rdmialnym, czyli $|X| = n$.

Każdy podzbiór X można zakodować ciagiem
binarnym długości $|X| = n$

i' to kodowanie p' jednowartościowe.

Reguła nr 1 to „metoda listy obecności”:

1^o Bierzemy $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

2^o Pomagamy (wzrostkowo)

x_1

x_2

$\vdots$

x_n

3^o Dla $A \subset X$, „odczytujemy” kolejne elementy

A : jeśli $x_i \in A$ to $b_i = 1$

$x_i \notin A$, to $b_i = 0$

W ten sposób otrzymujemy ciąg $b = (b_1, \dots, b_n)$.

x_1

b_1

x_2

b_2

$\vdots$

$\vdots$

x_n

b_n

i' na odczyt, na podstawie b możemy stwierdzić, które elementy z X są w A .

-3-

W szczególności, jeśli $Z \in \mathcal{P}(X)$ wybieramy odpowiednio

C_k - k -el. podzbiór zb. X ,

to odpowiada jej (po zakodowaniu)

$$C_k \ni A \iff b \in \text{Bin}_n, \text{ gdzie}$$

$$\# \{i : b_i = 1\} = k$$

Mamy tu metody na now. zadania.

Resty proszę dokonać samodzielnie.

4.8.17. b

Niech $A \subset \text{Bin}_{16}$, gdzie

$$b \in A \iff \text{linia „1”} > \text{linia „0”}$$

Zauważmy

$$A = A_{16} \cup A_{15} \cup \dots \cup A_9,$$

$$\text{gdzie } b \in A_k \iff \text{linia „1”} \text{ wynosi } k.$$

Σ zsumujmy odpowiednie

$$A = |A_{16}| + |A_{15}| + \dots + |A_9| = \Sigma.$$

-9-

Zad 5 (2 bity)

Dany p oraz $B \in \text{Bin}_{16}$, gdzie każdy element b ,

$$\text{Bin}_{16} \ni b = ((b_1, \dots, b_4), (b_5, \dots, b_8), (b_9, \dots, b_{12}), (b_{13}, \dots, b_{16}))$$

(I) (II) (III) (IV)

ma strukturę:

↑
negatory potężny.

Dobry $b \in \text{Bin}_{16}$ do zletem B oparty p .

na strukturę typu (1) i (2), gdzie

$$b = ((b_1, b_2, \dots, b_{12}), (b_{13}, \dots, b_{16}))$$

(1) (2)

(I) + (II) + (III)

Mamy: $b \in B \equiv b \in \text{Bin}_{16}$ oraz:

(1) zawsze 5 jedynek

(2) zawsze co najmniej jedna jedynka.

Stworzyć zasady wielokrotnego wyboru:

$$|B| = (\#(1)) \times (\#(2))$$

-1V-

Als z. weihnachten

$$(\#0) = \binom{12}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{Zun\u00fcchst } (\#0) &= |\text{Bin}_4| - 1 = |\text{Bin}_4 \setminus \{0,0,0,0\}| \\ &= 2^4 - 1. \end{aligned}$$

Daher

$$|B| = \binom{12}{5} (2^4 - 1) = \underline{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12},$$