Matematyka DYSKRETNA / zajęcia zaplanowane na 22.04

Temat: Lista 7 – metody zliczania c.d.!

Zasada In-Ex, zasada pudełkowa Dirichleta.

Zasada „Włączania – wyłączania" (In-Ex).

Wprowadzenie: Niech $|X| = n$. Do tej pory wielokrotnie stosowaliśmy zasadę addytywności (ZA)

$$A, B \in \mathcal{P}(X), \quad A \cap B = \emptyset, \text{ to}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

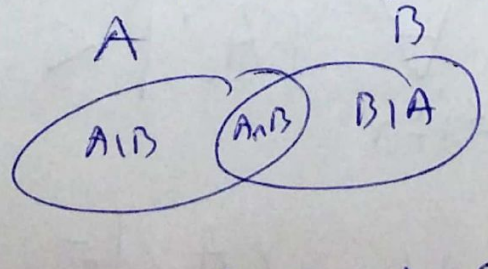
Problem 1: Niech $A, B \in \mathcal{P}(X)$, niekoniecznie rozłączne. Wyznaczyć moc $A \cup B$.

Zastosujmy zasadę addytywności. W tym celu weźmy partycję zbioru $A \cup B$: $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$, czyli

$$A \cup B = (A \setminus B) \,\dot{\cup}\, (A \cap B) \,\dot{\cup}\, (B \setminus A).$$

Dlatego z zasady addytywności:

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|.$$



Zauważmy, że $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$

Jeśli dla zbiorów E, F, $E \subset F$, to

$$|F \setminus E| = |F| - |E|,$$ bowiem

$F = E \,\dot{\cup}\, (F \setminus E)$ i z zasady addytywności

$$|F| = |E| + |F \setminus E|.$$

Dlatego z powyższego:

$$|A \cup B| = |A \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| + |B \setminus (A \cap B)| =$$

$$= |A| \cancel{- |A \cap B| + |A \cap B|} + |B| - |A \cap B|,$$

czyli

$$|A \cup B| = \underbrace{|A| + |B|}_{\substack{\text{iloczyny} \\ \text{nieparzyste} \\ \text{wstawiamy } (+)}} - \underbrace{|A \cap B|}_{\substack{\text{iloczyny} \\ \text{parzyste} \\ \text{wyrzucamy } (-)}}.$$

I ogólnie, jeśli

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}(X)$, to aby wyznaczyć

moc $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ należy:

(i) wziąć wszystkie nieparzyste iloczyny i je <u>wstawić</u>

(ii) wziąć wszystkie parzyste — " — <u>wyrzucić</u>.

Przykład (Zad. 4.2.7)

Dla X : $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in P(X)$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = \qquad \binom{5}{1} = 5$$

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| +$$

$$-\big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_1 \cap A_5| +$$
$$|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_5| +$$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$

$$|A_3 \cap A_4| + |A_3 \cap A_5| +$$
$$|A_4 \cap A_5|\big) +$$

$\binom{5}{3} = 10$

$$+\big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5| +$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5| +$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$$
$$|A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5|\big) +$$

$\binom{5}{4} = 5$

$$-\big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| +$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| +$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5|\big) +$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \qquad \binom{5}{5} = 1$$

Dwa kolejne przykłady pokazują zastosowania zasady In-Ex.

Zad 4.2.8

Niech G – zbiór reprezentujący całą grupę studentów.

Z założenia:

(i) $G = W \cup C$

W – uczestnicy wykładów

C – uczestnicy ćwiczeń

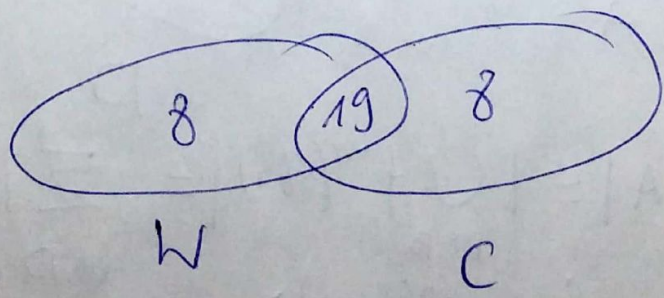
(ii) $|G| = 35$

(iii) $|W \cap C| = 19$

Z zasady In-Ex

$$|G| = |W| + |C| - |W \cap C|, \text{ skąd}$$

$|W| = 27$



4.2.9.

Niech $A = \{50, 51, 52, \ldots, 151\}$

$|A| = 102$

Bierzemy $A_3 \cup A_5 \cup A_7$, gdzie

$k \in A_i \equiv k \in A \wedge i \mid k$ (i dzieli k)

Z zasady In-Ex

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = |A_3| + |A_5| + |A_7| - \left(|A_3 \cap A_5| + |A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_7|\right) + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| .$$

$k \in A_3 \equiv k = 3j,\ j = 17, 18, \ldots, 50,\ |A_3| = 34$

$k \in A_5 \equiv k = 5j,\ j = 10, 11, \ldots, 30,\ |A_5| = 21$

$k \in A_7 \equiv k = 7j,\ j = 8, 9, \ldots, 21,\ |A_7| = 14$

$\Sigma = 69$

$|A_3 \cap A_5| = |\{60, 75, 90, 105, 120, 135, 150\}| = 7$

$|A_3 \cap A_7| = |\{63, 84, 105, 126, 147\}| = 5$

~~$|A_3 \cap A_5| = |\{60, 75, 90, 105, 120, 135, 150\}| = 7$~~

$|A_5 \cap A_7| = |\{70, 105, 140\}| = 3$

15

$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = |\{105\}| = 1$

$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 69 - 15 + 1 = \underline{\underline{55}}.$

Zasada szufladkowa (pudełkowa) Dirichleta (ZSD)

Sformułowanie potoczne:

Jeśli mamy r przedmiotów i chcemy je rozmieścić w n pudełkach, gdzie $n < r$ to przynajmniej w jednym z pudełek znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

Podejście abstrakcyjne do ZSD

(F1) Weźmy dowolny skończony X i jego partycję $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$.

Wtedy dla co najmniej jednego atomu tej partycji, powiedzmy A_{i_0} mamy

$$|A_{i_0}| \geq \frac{|X|}{r} \quad (*)$$

Dowód. Gdyby $\forall_{1 \leq i \leq r} |A_i| < \frac{|X|}{r}$, to z (ZA)

$$|X| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_r| < \underbrace{\frac{|X|}{r} + \frac{|X|}{r} + \ldots + \frac{|X|}{r}}_{r} = |X|$$

co jest niemożliwe. Zatem (F1) jest PRAWDĄ.

//

$$(F1) \Longrightarrow (ZSD)$$

Istotnie, niech będzie F1 oraz, niech r - liczba szufladek, $|X|$ - liczba przedmiotów. Jeśli $r < |X|$, to z $(*)$, ponieważ $|A_i|$ - liczba przedmiotów w i-tej szufladzie, wynika, iż szufladka i_0

zawiera $|A_{i_0}| \geq \frac{|X|}{r} > 1$ przedmiotów,

czyli co najmniej 2.

//

Sformułujmy teraz ~~uogólnienie od F1~~ kolejne uogólnienie:

(F2) Niech $A, B \subset X$, X - skończony,

$|A| > r|B|$ dla pewnej liczby naturalnej r

dana będzie funkcja (czyli relacja)

$$f: A \to B$$

Wtedy: $\exists_{b_0 \in B} \; |f^{-1}(\{b_0\})| > r$

$$f^{-1}(\{b_0\}) = \{a \in A : f(a) = b_0\}$$

Omówmy tę sytuację dokładniej.

$f: A \to B$ oznacza, że mamy relację:

$$\forall_{(a,b)\in A\times B} \quad afb \equiv b=f(a),\ a\in A, \text{ i gdy}$$

każdemu $a\in A$ odpowiada <u>dokładnie</u> jedno $b\in A$, że $b=f(a)$.

Ale może zdarzyć się, że dla pewnego $b_0\in B$ <u>nie znajdzie</u> się <u>żadne</u> $a\in A$, że $f(a)=b_0$.

Wtedy takie b_0 nas <u>nie interesuje</u> i „wyrzucimy" je z B. Piszemy wtedy

$$f: A \xrightarrow{na} B, \quad \text{lub } \underline{B=f(A)}.$$

Zachodzą dwa przypadki:

a) $|A|=|B|$, czyli A i B są <u>równoliczne</u>, co oznacza, że f jest typu „1–1" (różnowartościowe)

b) $|A|\neq|B|$, ale wtedy ponieważ $f(A)=B$, $|A|>|B|$.

czyli $|A| > r|B|, \ r \geq 1$.

Definiujemy na A relację R

$$a', a'' \in A \quad a' R a'' \equiv f(a') = f(a'')$$

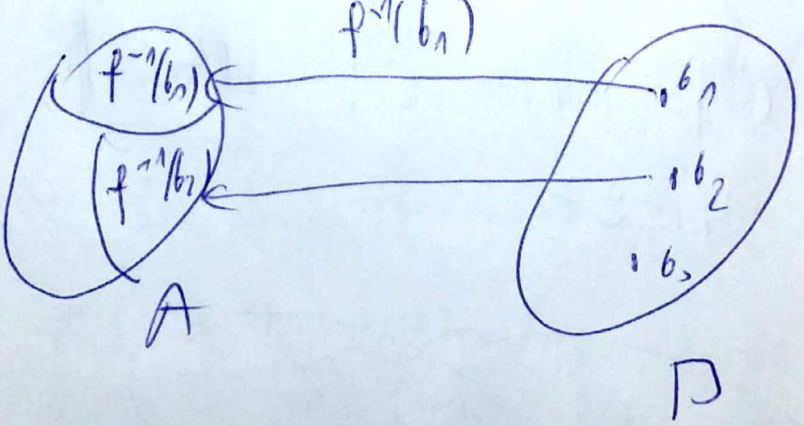
Łatwo uzasadnić, że R jest relacją równoważności.

Generuje ona partycję z elementami

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}, \quad b \in B$$

Ponieważ liczba elementów tej partycji wynosi $|B|$

$$|\{f^{-1}(b), b \in B\}| = |B|$$



Stąd

$$r|B| < |A| = \left|\bigcup_{b \in B} f^{-1}(\{b\})\right| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})|,$$

więc $\exists\, b_0 \in B$, że $|f^{-1}(\{b_0\})| > r$.

W przeciwnym razie, gdy $\forall_{b \in B} \ |f^{-1}(\{b\})| \leq r$, to

$$\sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})| \leq r \cdot |B|, \text{ czyli } r|B| < r|B|,$$

co jest niemożliwe.

Zauważmy, że na końcu wykorzystaliśmy rozumowanie, które pośrednio wynikało z (F1).

Zatem

$$(F1) \Longrightarrow (F2)$$

Ponieważ (F1) jest zawsze prawdą, to

$$(F2) \Longrightarrow (F1),$$ a więc

$$(F1) \equiv (F2).$$

Są to odpowiednie sformułowania ZSD!

Przykład. Pokazać, że w zbiorze $A \subset \mathbb{Z}$, $|A| = p+1$ istnieją co najmniej dwie liczby $a, b \in A$, że $p \mid a-b$.

Dla A, $p \geq 1$ j.w. definiujemy odwzorowanie

$$f : A \longrightarrow \{0, 1, 2, \ldots, p-1\},$$ gdzie

$f(a)$ = reszta z dzielenia a przez p, czyli liczba ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$.

Wykonamy ZSD w wersji (F2).

Ponieważ u nas $B = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$

$|B| = p < p+1 = |A|$, więc $r = 1$

i z (F2) dla pewnego $b_0 \in B$ zbiór

$f^{-1}(\{b_0\}) = \{a \in A : f(a) = b_0\}$

wszystkie te $a \in A$, które mają tę samą (b_0) resztę z dzielenia przez p, a więc ich różnica dzieli się przez p

ma więcej elementów aniżeli $r = 1$, czyli co najmniej dwa!

Jeszcze jeden problem związany z liczbami Stirlinga 2-go rodzaju..

Przypomnijmy, dla $|X|=n$, $1 \le k \le n$, liczbę wszystkich k-el. podziałów zbioru X oznaczamy przez $S(n,k)$.

Wiadomo, że

$$\forall_{1<k<n} \quad S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

oraz $S(n,1) = S(n,n) = 1$.

Zad 3 / Lista 7

Oblicz $S(6,1) + S(6,2) + S(6,3) + S(6,4) + S(6,5) + S(6,6)$

Wiemy, że $S(6,1) = S(6,6) = 1$ oraz

$S(6,2) = 2^5 - 1$ (bo $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$)

$S(6,3) = S(5,2) + 3 \cdot S(5,3) = 2^4 - 1 + 3S(5,3)$

$S(5,3) = S(4,2) + 3S(4,3) = 2^3 - 1 + 3S(4,3)$

$S(4,3) = S(3,2) + 3S(3,2) = 2^2 - 1 + 3(2^2 - 1)$

Mamy $S(6,3)$

Podobnie wyznaczyć $S(6,3)$, $S(6,4)$.

Pracy do zrobienia!