

- 1 -
M.D. Informatyka - zajęcia zaplanowane na 29.04.2020.

Temat. Wprowadzenie do ogólnej TEORII GRAFÓW (lista 9)

Pojęcie grafu - def. formalna i jego reprezentacja graficzna

Graf G to paryżetadum staneky matematyczny, Na ty staneky składają się:

(i) dwa zbioruy: V - zbiór wierzchołków grafu G ,
 E - zbiór krawędzi grafu G

(ii) relacja γ - nazywana funkcją wyboru, gde

$\gamma \subset E \times (V \times V)$, tędna każdej krawędzi

$e \in E$ przyporządkowane są dwa elementy $u, v \in V$,
które nazywamy koncami tej krawędzi.

Mamy więc

$$E \ni e \longrightarrow \gamma(e) = (u, v) \text{ (lub } (v, u)) \in V \times V$$

Staneky na postaci

$$G = (V, E, \gamma)$$

Wrócę do def. grafu.

1^o. Mówi się, że m , i dla pewnej $k \in K$

$$\delta(k) = (u, w).$$

Należy także pamiętać o nazwach "degeneracja",
albo petla (LOOP)

2^o. Jeśli δ to funkcja odwzorowania, to G
nazwy grafem PROSTYM, gdy nie ma pętli.

Zatem, jeśli $u \in G$, w tym samym krągu K_1 i K_2
odpowiadające te same krawędzie, to NIE JEST ON
grafem PROSTYM.

3^o. Jeśli będą zbiory K, W się skłaniały.

4^o. Czasem zbiór krawędzi i wierzchołków grafu G
będą oznaczane $K(G), W(G)$.

5^o. Dla $k \in K(G)$, $\delta(k) = (u, \tilde{u}) \in W \times W$.
 $u, \tilde{u}$ nazwy końców dla podkreślenia, a
gdy NIE JEST SKIEROWANY.

-)-

Długo wyjeżdżasz pomyślisz, a $(w, \tilde{u}) \neq (\tilde{u}, v)$.

P.1.

Niech $G = (K, W, \delta)$ jak niżej

$$K = \{k_1, k_2, k_3\}$$

$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$\delta(k_1) = (w_1, w_2), \quad \delta(k_2) = (w_2, w_3)$$

$$\delta(k_3) = (w_3, w_4)$$

Zauważ, że G to przybliżony graf prosty.

P.2. Weźmy ten graf $\tilde{G} = (\tilde{K}, \tilde{W}, \tilde{\delta})$, gdzie:

$$\tilde{K} = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$\tilde{W} = \{a, b, c, d\}$$

$$\tilde{\delta}(e_1) = (c, d)$$

$$\tilde{\delta}(e_2) = (d, a)$$

$$\tilde{\delta}(e_3) = (a, b)$$

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że G i $\tilde{G}$ są różne.

Faktorem tego, że pokazujemy, że $\tilde{G}$ powstaje z G według ściśle określonej procedury:

-4-

(i) Istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $W \xrightarrow{f} \tilde{W}$

(ii) dla każdej $k \in K(G)$, gdzie

$$\delta(k) = (u, v) \in W(G) \times W(G)$$

istnieje dokładnie jedna krawędź $\tilde{k} \in \tilde{G}$, a

$$\tilde{\delta}(\tilde{k}) = (f(u), f(v))$$

Zauważmy, że w podanym przykładzie, jeśli

$$f: W \rightarrow \tilde{W}, \text{ gdzie}$$

$$f(u_1) = c, f(u_2) = d, f(v_3) = a, f(v_4) = b,$$

to warunkiem podany w (ii) będzie spełniony.

Teraz do uzasadnień:

Jeśli tak jest, to mówimy, że grafy G i $\tilde{G}$ są izomorficzne (podobne), co zapisujemy

$$G \cong \tilde{G}$$

- 5 -

W zbiorze wszystkich grafów mamy teraz zdefiniować relację R :

$$G R \tilde{G} \equiv G \cong \tilde{G}.$$

Prosty uzasadnienie (norm. p w zbiorze relacji),
że R p RZ, RS, RP .

Zatem p relacja równoważności.

Wtedy klasa abstrakcji, $G, [G]$ zawiera
wszystkie grafy podobne do G .

Dalej taki błąd assumptions dany graf.

P.3.

Niech $G = (K(G), W(G), \delta)$, gdzie

$$|K(G)| = 2, \quad |W(G)| = 3$$

oraz

$\tilde{G} = (K(\tilde{G}), W(\tilde{G}), \tilde{\delta})$, gdzie

$$|K(\tilde{G})| = 3.$$

Wtedy G i $\tilde{G}$ nie są izomorficzne.

-6-

Interpretacja geometryczna

Z krotką $G = (K(G), W(G), \delta)$ mamy
zmianę jego wyklad zwaną jest interpretacją G .
Można to zrobić na wiele sposobów.

Uważamy n_1, n_2 :

- 1) rysujemy na płaszczyźnie (a nie np. na powierzchni sfery) 2D
- 2) wierzchołki oznaczają jako punkty płaszczyzny
- 3) krawędzie jako linie
- 4) starajemy się rysować tak, aby linie nie przecinały się.

P.1.

To nie jest rysunek grafu (Płasko)

P.2.

○ To jest rysunek najprostszego grafu
 $G = (K(G), W(G), \delta)$, gdzie:

- 7 -



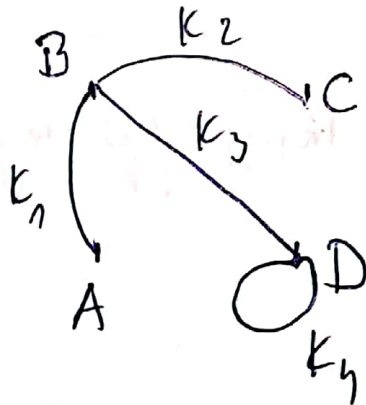
$$K(G) = \{k\}$$

$$W(G) = \{A\}$$

$$\delta(k) = (A, A)$$

7.6.

Wzryj przykład



Prezentacja on graf $G = (K(G), W(G), \delta)$,

gdzie $K(G) = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$

$$W(G) = \{A, B, C, D\}$$

a) Podaj' opis' funkcji' wyboru δ

b) Napisz' w inny sposób G

Pojęcie DROGI (ścieżki)

Niech dany będzie graf $G = (K(b), W(b), \delta)$

Poniżej drogi długości n ($n \geq 1$) grafu G

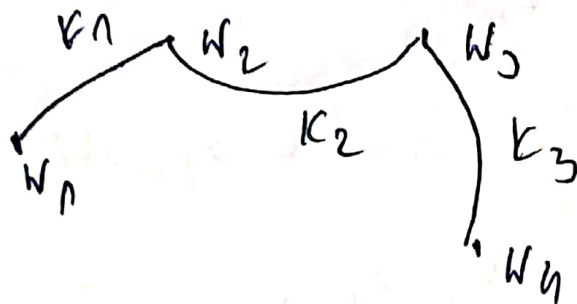
rozumiejemy ciąg kolejnych jego grafu

$(k_1, k_2, \dots, k_n)$, takich że

różne krawędzie mają wspólny koniec

7.7.

Wzrost grafu z P.1 i nierzeczywistość



Wzrost: (k_1) to pojedynczy wierzchołek $n=1$

$(k_1, k_2), (k_2, k_3)$ - drogi długości $n=2$

(k_1, k_2, k_3) droga długości $n=3$.

Oczywiście, jeśli ~~zda~~ w drodze długości n , odwrócić kolejność krawędzi, to dostaniemy drogę dł. n .

-9-

Zak. np.

$(k_2, k_1) / (k_3, k_2)$ - droga dł. 2

(k_3, k_2, k_1) - droga dł. 3

Al. (k_1, k_3, k_2) - nie jest drogą

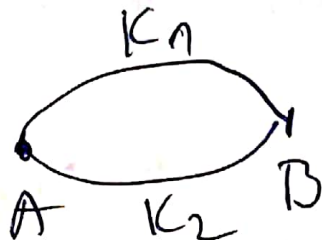
P.8.

Wzng 6 z P.7.

Zauw., że ciąg $(k_1, k_2, k_3, k_2, k_1)$
j. drogą. Oczymie w tej drodze (dł. 5)
pewne krawędzie powtarzają się $\hat{m}(k_1, k_2)$.

Jeśli w danej drodze występują różne
krawędzie, to nazywamy ją drogą prostą

P.9. Wzng. gr. dany rysunkiem



Pomocnik

$$\delta(k_1) = \delta(k_2) = (A, B),$$

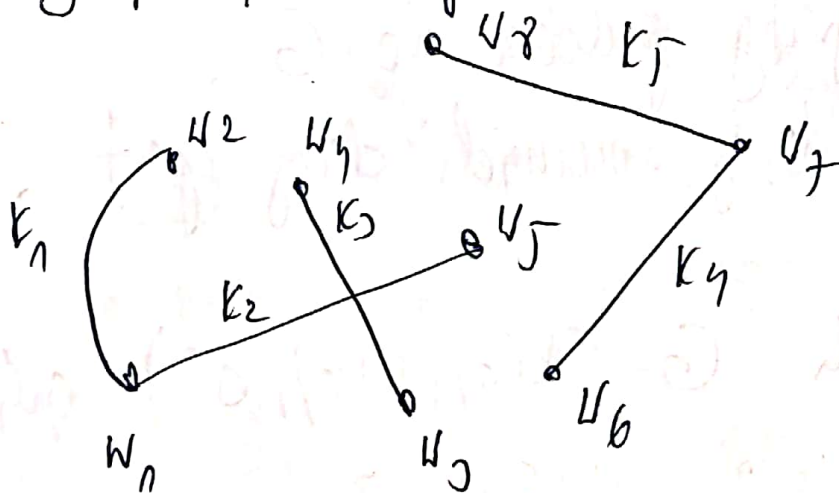
G nie jest płaski.

Albo droga (k_1, k_2) nie jest prosta.

Prawdy nie wynikał z tych faktów.

Zad. 6.2.5

Dany jest nieskierowany graf $G = (V(G), E(G), \delta)$



Ornany elementy $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

$E(G) = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ i ich incydenty

Punktach chodzących z v_1 (k_1, k_2, k_3)

(k_4, k_5, k_6)

-11-

Zauważ, że tu jest one profile.

Nakładając (k_1, k_2) , (k_5, k_4) na drogę dł. 2, prostym.

Naszym przybliżeniu drogi jest DROGA ZAMKNIĘTA.
Niedługo będzie droga

$$d = (k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_m}).$$

Gdy kładzie k_{i_1} oraz k_{i_m} (pierwsza i ostatnia) mając współrzędne wierzchołki, to droga d naszym zamkniętą. W naszym celu otwarte.

7.10.



(k_1) - otwarte

(k_4) - zamknięte

(k_1, k_2, k_3) - zamknięte.

- 12 -

Wśród dróg zamkniętych wyróżniamy te, które:

(i) są proste (składają się z różnych krawędzi)

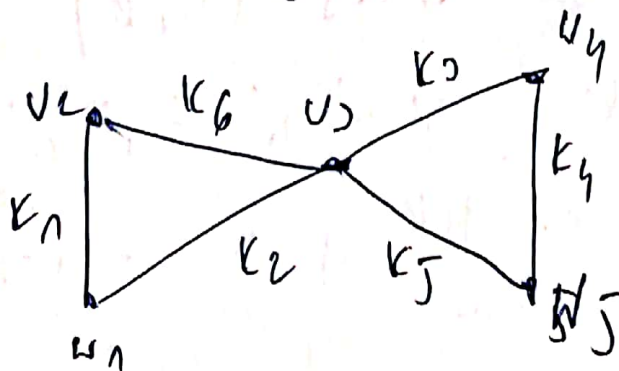
(ii) składają się z różnych wielokątów, za wyjątkiem wspólnego dla krawędzi pierwszego i ostatniego.

Takie drogi nazywamy CYKLAMI.

Graf, który nie zawiera cykli nazywamy acyklicznym.

P.11. Graf z P.NO zawiera cykl, nie nie p acykliczny.

P.12. Wtedy graf



Węzł drogi:

$$d = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$$

Jasne p'ie:

(i) d p' prostka

(ii) d p' zamknięta.

Al d nie p' cyklem - DLACIEGO?

Niech dany bę graf G . Miel' w G

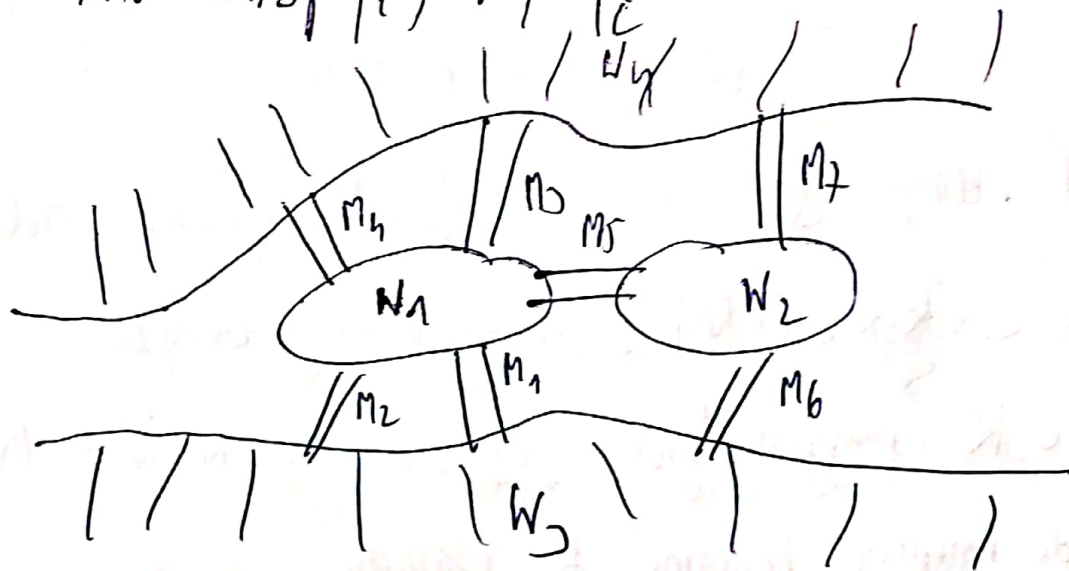
istnie droga: prostka, zamknięta i zbiorek de
wzrostle krawędzi, b G nazywamy system
Eulera. Wtedy droga takie nazywamy cyklem Eulera.

Czyli G p' system Eulera $\equiv$
ma cykl Eulera.

-14-

Temu gęsto zajął się od pewnego problemu,
który w literaturze przedmiotu nazywamy p'
problemem mostów królewieckich

Wieniancy XVIII w. Królewca zastanawiali się
nad następującym pytaniem



dwie wyspy łączą ze sobą i brzegami 7 mostów.
Czy istnieje możliwość przejścia wszystkich
mostów tylko raz aby wrócić do punktu
wyjścia?

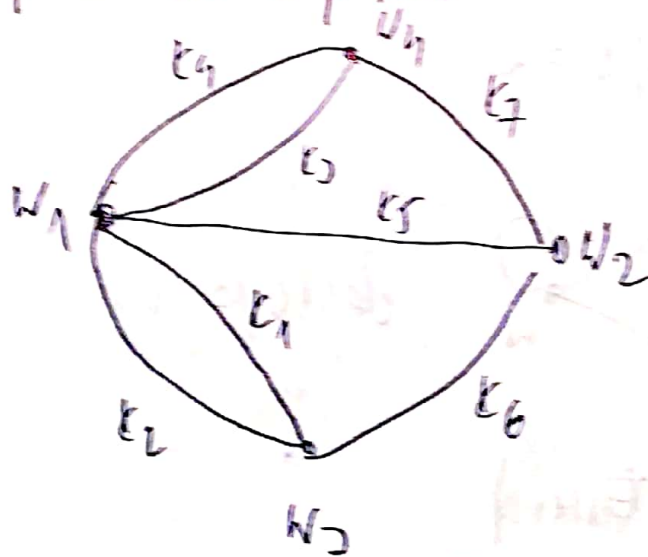
Problem pojawił się w 1736 L. Euler używając
do tego celu (po raz pierwszy) pojęcia koncepcji

grafu.

Zidentyfikuj:

Oba brzozy mekni i obre wyspy zamknięte
niezależnie, masz - kątami grafu.

Odpowiedz na pytanie



i oryginalny problem przedstawia następująco:

Czy powyższy graf ma cykl Eulera?

Algorytmiczny sposób rozwiązywania problemu
zawierający pewne własności grafu Eulera.

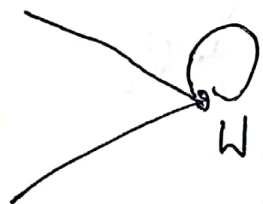
Pojęcie stopnia wierzchołka

$$\deg(w) = \# \text{ krawędzi zakończonych w} + 2 \times \# \text{ pętli}$$



stopień wierzchołka

$$\bigcirc_w \quad \deg(w) = 2$$



$$\deg(w) = 4$$

Tw (I tr. Euler)

Jeli G p. Euler, to $\forall w \in W(G)$
 $\deg(w)$ p. parzysta

Uzasadnij dlatego P.M.K. nie ma rozwiązania.

Czy prawdziwe jest, że jest

$$\forall w \in W(G) \quad 2 \mid \deg(w) \Rightarrow G \text{ Euler?}$$