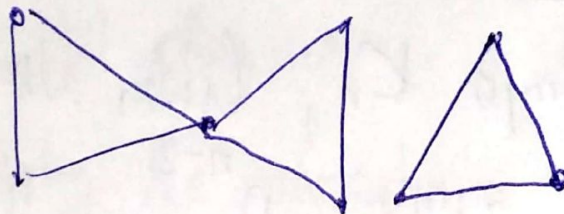


Temat. Grafy Eulera & Hamiltona (lista 9).

Wiemy (ostatnie zajęcia), że warunkami

$$\forall u \in V(G) \quad 2 \mid \deg(u) \quad \text{p' było konieczny do tego,}$$

aby G był Euler. Ilustruje to np. graf (dlaczego?)



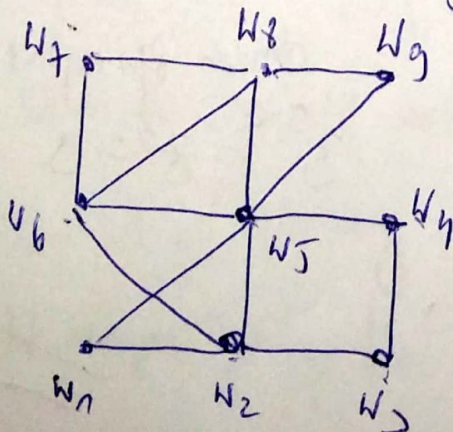
Ależ warunkiem ten byłby wtedy dostateczny, G musiałby mieć jeszcze dotychczasowe własności - musi być spójny, czyli każde dwa jego wierzchołki muszą być połączony jedną drogą.

Mamy zatem 2 Tw Eulera

Wła G spójny, G p' Euler $\iff \forall u \in V(G) \quad 2 \mid \deg(u)$.

Zad. 6.2.12

Mamy graf:



Wła on spójny i spełnia warunki poprzednich dla $k. u \in V(G)$
Zatem p' Euler.

2. To Euler ma "wady" - jest ograniczony i nie podaje konstrukcji cyklu Eulera.

Zatem, nie ma G p' Euler, ale tu. Euler nie podaje przepisu na jej konstrukcję!

Potrzebny p' do tego algorytm zewnetrzny, tu. algorytm Fleury'ego. Na powyższym przykładzie wyjdzie jego działanie.

Opis teorii tego algorytmu $\rightarrow$ str. 104.

Powinno nas interesować, a konkretnie K : $\delta(K) = (W, \tilde{E})$ bzdż oznaczali jako $(W, \tilde{E})$.

1. INPUT: wybieramy dowolny wierzchołek, np. w_1

2. Krok A.F.

Ustalamy jakie krawędzie wychodzą z w_1 :

$(v_1, v_2), (v_1, v_5)$.

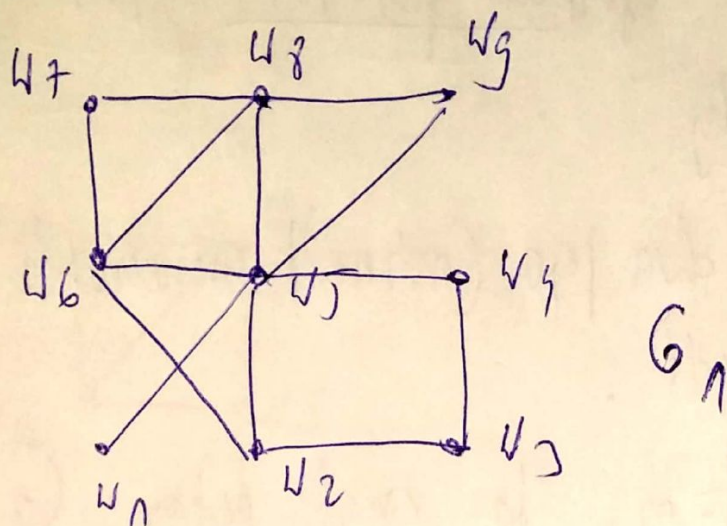
Wybieramy spośród nich tu, że jest to najmniejszy

z G, otwarty graf spójny.

Naszym pomysłem krawędź p' dobrze.

условиям η . (w_1, v_2)

На рисунке дан граф G_1

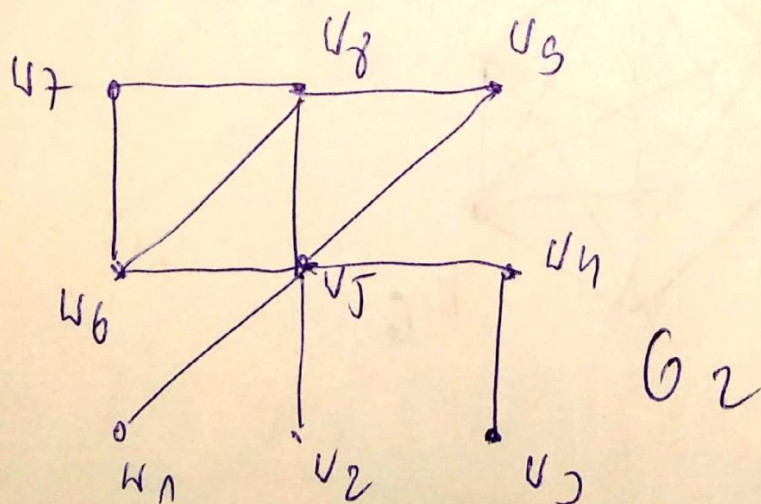


i. построим цикл Ейлера $(w_1, v_2) \rightarrow$

3°. Итерация графа G_1 с добавлением ребра v_2 :

мы ~~имеем~~ графы $(v_2, v_1), (v_2, v_5), (v_2, v_3)$

Условие (v_2, v_3) . Тогда G_2

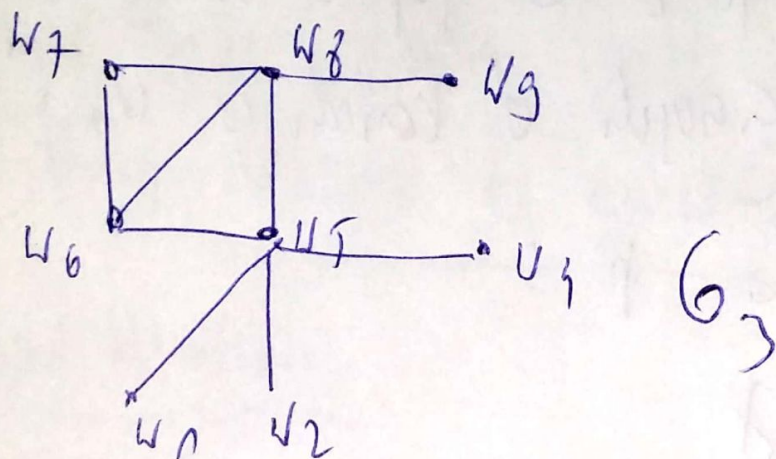


i. цикл $\bar{E}$. $(v_1, v_2) \rightarrow (v_2, v_3)$.

-3-

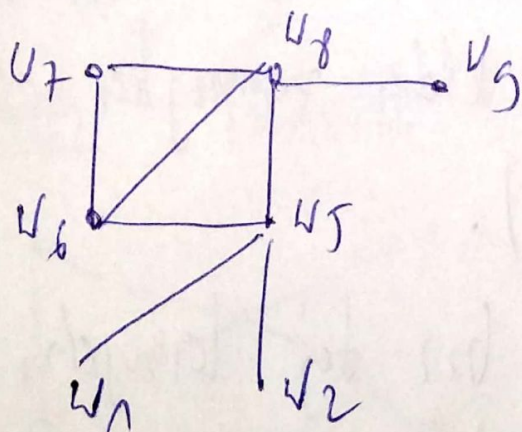
Teraz p' było jedną krawędzią (v_3, v_4) . Ił
ona dobra — usuwamy ją i wiecihedru w_3 .

Zatem cykl. E $(v_1, v_2 | \rightarrow (v_2, v_3) \rightarrow (v_3, v_4) |$



Podobnie (w_4, u_5) , gdzie

$(v_1, v_2 | \rightarrow (v_2, v_3) \rightarrow (v_3, v_4) \rightarrow (w_4, u_5) |$



Teraz (u_5, v_2) , (u_5, w_1) , (u_5, u_6) , (u_5, u_8)
złk
dobra

Wybierzmy m . (w_5, v_6) .

Itd.

Algoritm ten zakończył się. Długo, kiedy pomyśle
byle cyklem Eulera.

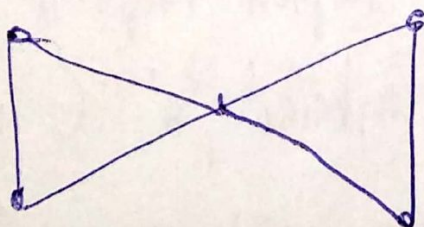
Proszę dokonać tej procedury!

Cykl Hamiltona.

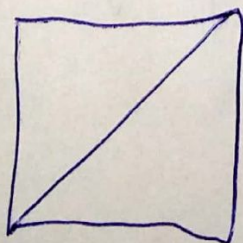
It to droga zamknięta, która przechodzi tylko raz
przez każdy wierzchołek cyklu G .

Jeli G ma cykl Hamiltona, to możemy go nazwać
Hamiltonem.

Uwaga Hamilton $\neq$ Euler



It Euler, ale nie Hamilton

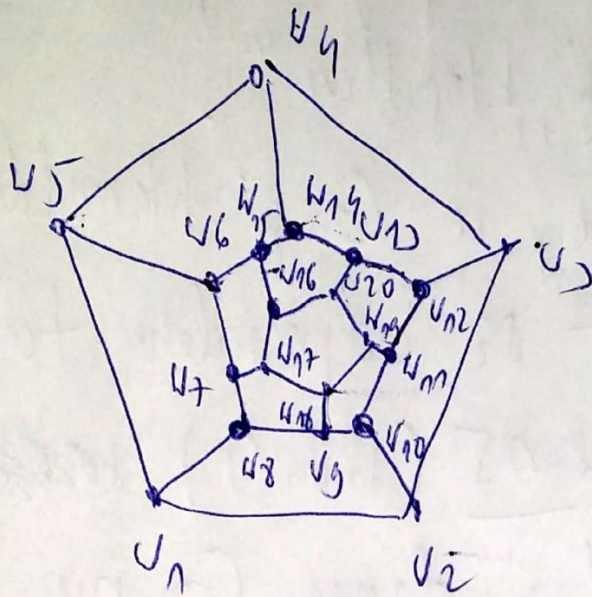


It Hamilton, ale nie Euler.

Uzasadnić to!

-6-

Problem 4 (rad. 6.2.10).



$$(U_1, U_2) \rightarrow (U_2, U_3) \rightarrow (U_3, U_4) \rightarrow (U_4, U_5) \rightarrow (U_5, U_6)$$

~~$$\rightarrow (U_6, U_7) \rightarrow (U_7, U_8) \rightarrow (U_8, U_9) \rightarrow (U_9, U_{10}) \rightarrow$$~~

~~$$(U_{10}, U_{11}) \rightarrow (U_{11}, U_{12}) \rightarrow (U_{12}, U_{13}) \rightarrow (U_{13}, U_{14})$$~~

~~$$\rightarrow (U_{14}, U_{15}) \rightarrow (U_{15}, U_{16}) \rightarrow (U_{16}, U_7)$$~~

$$(U_6, U_{15}) \rightarrow (U_{15}, U_{14}) \rightarrow (U_{14}, U_{13}) \rightarrow (U_{13}, U_{12}) \rightarrow$$

$$\rightarrow (U_{12}, U_{11}) \rightarrow (U_{11}, U_{10}) \rightarrow (U_{10}, U_9) \rightarrow$$

$$\rightarrow (U_9, U_8) \rightarrow (U_8, U_7) \rightarrow (U_7, U_6) \rightarrow (U_6, U_5)$$

$$\rightarrow (U_5, U_4) \rightarrow (U_4, U_3) \rightarrow (U_3, U_2) \rightarrow (U_2, U_1)$$

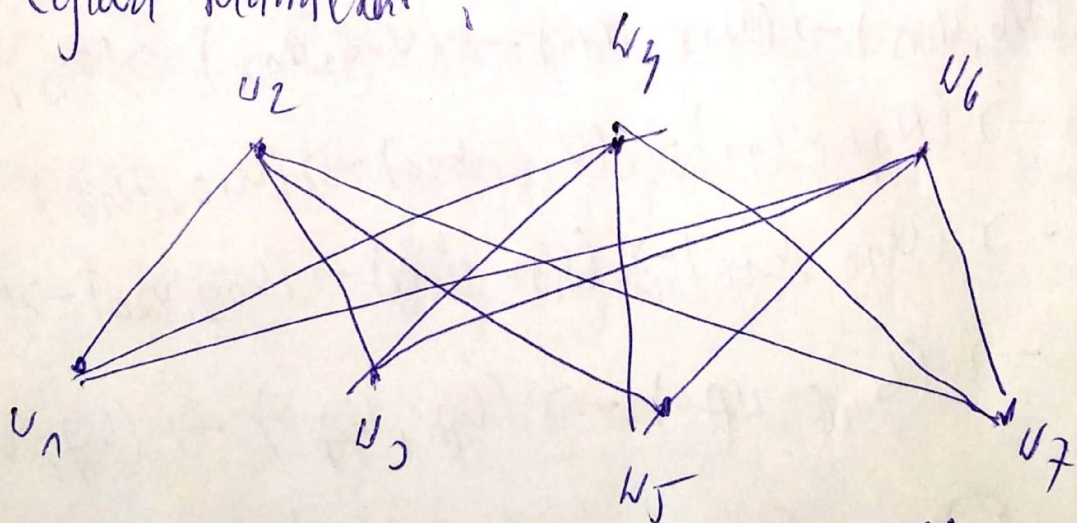
Passy to preanalizaci!

Jak wiadać na ostatnim przykładzie, wskazuje cykl Hamiltona Γ , "kropotliwie".

Samo stwierdzenie, że G jest Hamiltonianem jest już łatwiejsze — są odpowiednie tu (patrz 2.2)

W zadaniu 6.2.15 (link 9) ~~zadanie~~ mamy przesadzić, że dany G nie jest Hamiltonianem.

W tym przypadku odwołujemy się do metody wygenerowania wszystkich drog zamkniętych i na tej podstawie stwierdzamy, że wśród nich nie ma cyklu Hamiltona.



Z symetrii, wystarczy to zweryfikować dla wybranych wielokątów ze zbioru $\{u_2, u_4, u_6\}$ i $\{u_1, u_3, u_5, u_7\}$ (plancho?).

-8-

np. dla W_1 i W_2 . Prosy to zrobić!

Na koniec wrócimy do grafu EULERA.

Jak pamiętamy, Π d. Eulera małm, i' p'is G
p' spójny i' $\forall_{w \in W(G)}$, $\deg(w)$ p' l. parzyste,
to G p' Euler.

Czasem pytamy tyłko o tw. drogę Eulera,
a m, droga złożona z wszystkich krawędzi grafu
bez powtórzeń (cykli proste).

Wiering pomyłki zad. 6.2.14.

W grafie G dołtade dwa wienchodki,
połniedron W_1, W_2 mając stopien' nieparzysty oraz
 G p' spójny. Aby wykazać, i' G ma
drogę Eulera, rozzerujemy go do
grafu $\tilde{G}$:

-9-

$$W(\tilde{G}) = W(G)$$

$$K(\tilde{G}) = K(G) \cup \{(u_1, u_2)\},$$

czyli $\tilde{G}$ powstaje z G poprzez dodanie dodatkowej krawędzi o końcach u_1 i u_2 .

Wtedy $\tilde{G}$ p' :

- spójny
- stopień każdego jego wierzchołka p' linie parzysta.

Zatem $\tilde{G}$ p' Eulera. Z lematu w tym celu, i krawędź, której za pomocą cyklu Eulera p' (u_1, u_2) .

Zatem ten cykl bez tej krawędzi p' tworzy Euler dla grafu G .

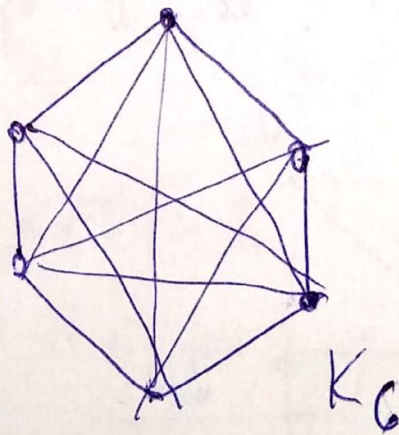
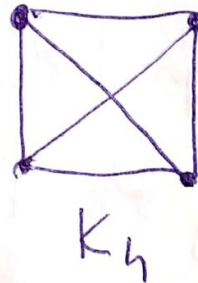
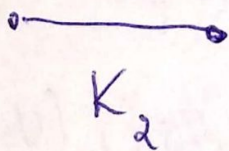
Grady petne

Pomenuj, a' G je grafom petnym, jeli

(i) je prosty

(ii) kazdi dva jeho (rozdne) menshoth
tely kruhy.

Jeli $|V(G)| = n$, to graf petny G
oznacujeme K_n .

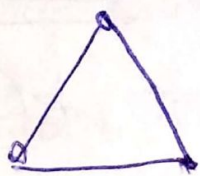


Drewo i drewo spinyjące

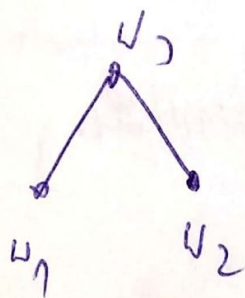
Każdy graf, który jest spójny i acykliczny nazywamy drewnem i oznaczamy przez T .

Wtedy każdy $w \in W(T)$, $\deg(w) = 1$ nazywamy liściem T .

Przykład



G nie jest drewnem (długość 3)



$G = T$ jest drewnem

v_1, v_2 - liście

Zauważ, że $|K(T)| = 2$, $|W(T)| = 3$ i oczywiście

$$|K(T)| = |W(T)| - 1$$

i tak jest zawsze dla każdego drzewa i po tym porównaniu, czy graf prosty i spójny jest drewnem.

-12-

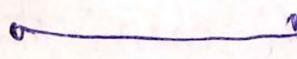
Wzamy teraz graf G . Każdy graf, który
jest zawarty w G (podgraf), jest drzewem T

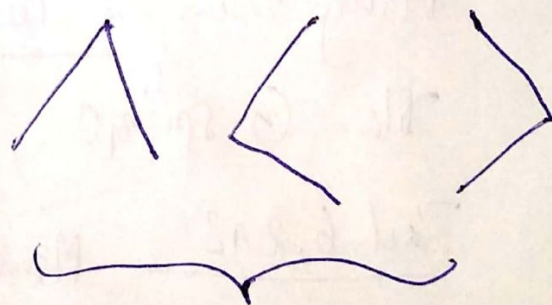
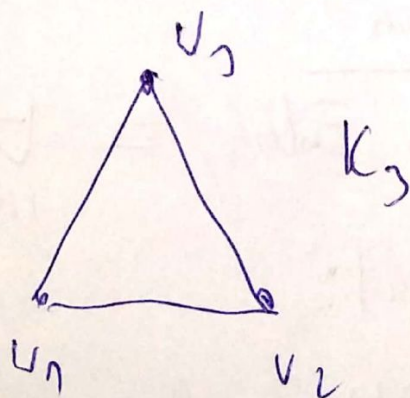
oraz $|W(T)| = |W(G)|$ nazywamy
drzewem spanningowym dla G .

Tw. (Cayleya).

Dla grafu pełnego K_n , liczba wszystkich
drzew spanningowych wynosi n^{n-2} $n \geq 2$

Ilustracja tw. Cayleya.

 $K_2 = T_2$ $2^{2-2} = 2^0 = 1$



drzew spanningowych
 $3^{3-2} = 3^1 = 3$

Proszę sprawdzić dla K_4