M.D. ćwiczenia zaplanowane na 13.05, lista 10 cz. I.

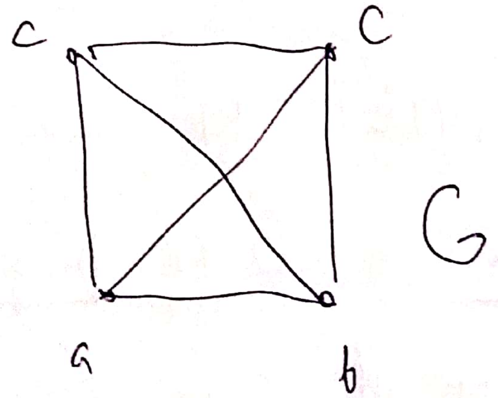
Temat. Grafy planarne i ich własności.

Niech dany będzie graf $G=(W, K, \gamma)$. Wiemy, że możemy mu przypisać jego interpretację geometryczną. Ustaliliśmy zasady tworzenia takiej interpretacji. Wiemy, że jest ona niejednoznaczna, tj.

$$G \longrightarrow \{\text{zbiór interpretacji}\} = Z$$

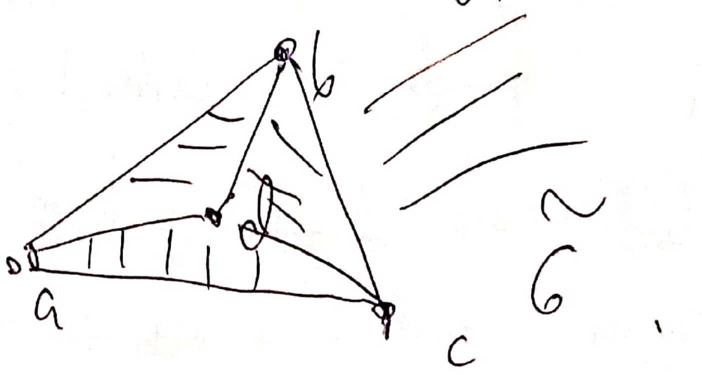
Def. Jeśli w Z (j.w.) istnieje interpretacja, dla której żadne dwie krawędzie nie przecinają się, to mówimy, że G jest planarny.

P.1. Weźmy K_4 (graf pełny dla $n=4$), którego standardowa reprezentacja wygląda następująco



Zatem nie potwierdza ona, że G jest planarny.

Weźmy graf $\tilde{G}$, którego reprezentacja wygląda następująco



Proszę uzasadnić, że G i $\tilde{G}$ są izomorficzne.

Wniosek: K_4 jest grafem planarnym

Zauważmy, że:

$$|K(G)| = |K(\tilde{G})| = 6$$
$$|W(G)| = |W(\tilde{G})| = 4$$

Ponadto dla interpretacji $\tilde{G}$ mamy 4 podzbiory płaszczyzny parami rozłączne (nie należące do interpretacji – czyli bez krawędzi), jak zaznaczono to na rys. wyżej. Liczbę tych podzbiorów oznaczmy przez r, u nas $r=4$. Nazwijmy je REGIONAMI.

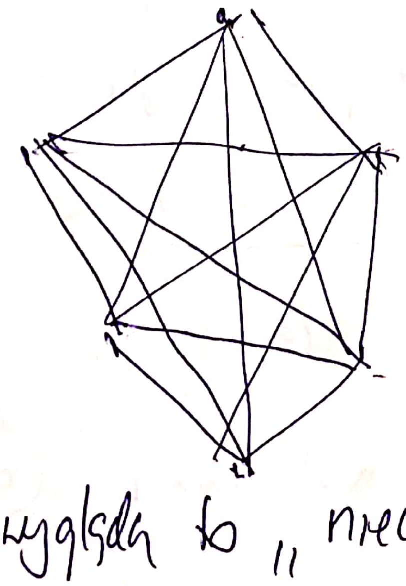
Mamy $4 = 6-4+2$, czyli

$$\boxed{r = K(\tilde{G}) - W(\tilde{G}) + 2}$$

Jest to treść <u>I tw. Eulera</u> dla ilustracji grafu planarnego.

<u>Uwaga</u>. Sprawdzić, czy dla ilustracji <u>G zachodzi powyższy wzór</u>. Wyprowadzić z tej analizy właściwy wniosek!

Weźmy teraz sytuację bardziej skomplikowaną, przypadek grafu K_6. Jego standardowa ilustracja ma postać



G

Jak widać wygląda to „nieciekawie" – taka reprezentacja nie przesądza, że G jest planarny. Jak rozstrzygnąć kwestię planarności K_6?.

W sukurs idzie <u>II Tw. Eulera dla g. planarnych.</u>

Tw II Eulera.

Jeśli G jest planarny, to

$$|K(G)| \leq 3|W(G)| - 6.$$

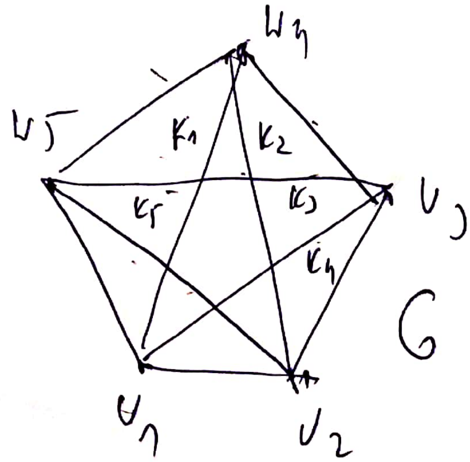
P2. Weźmy K_6:

$|K(G)| =$?, $|W(G)| = 6$ (uzupełnić)

Zatem $3|W(G)| - 6 = 12 < |K(G)| =$?, co dowodzi, że $G = K_6$ nie jest grafem planarnym.

Zad 1 (Lista 10)

Weźmy K_5. Jego standardowa ilustracja jest następująca



Zauważmy, że $|W(G)| = 5$, $|K(G)| = 10$?

Zatem dla G nie zachodzi II tw. Eulera — $G = K_5$ nie jest planarny.

Jeśli usuniemy dowolny krawędź, to ~~[illegible]~~ tw. Eulera ~~[illegible]~~ zachodzi to ~~[illegible]~~ ~~krawędzi dodaj więc ją z powrotem~~. $g = g$ (Patrz analiza dalej!)

Powiemy, że G jest grafem dwudzielnym, jeśli $W(G) = W_1 \cup W_2$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$,

$$\forall_{k \in K(G)} \ \exists_{\substack{w_1 \in W_1 \\ w_2 \in W_2}} \ \gamma(k) = (w_1, w_2),$$

czyli w takim grafie, każda krawędź ma końce należące do W_1 i W_2. Jeśli dodatkowo k. dwa wierzchołki z W_1, W_2 tej krawędzi to nazwijmy go dwudzielnym pełnym.

Jeśli $m = |W_1|$, $n = |W_2|$, to taki G oznaczamy $K_{n,m}$. (dwudzielny pełny typu $n \times m$).

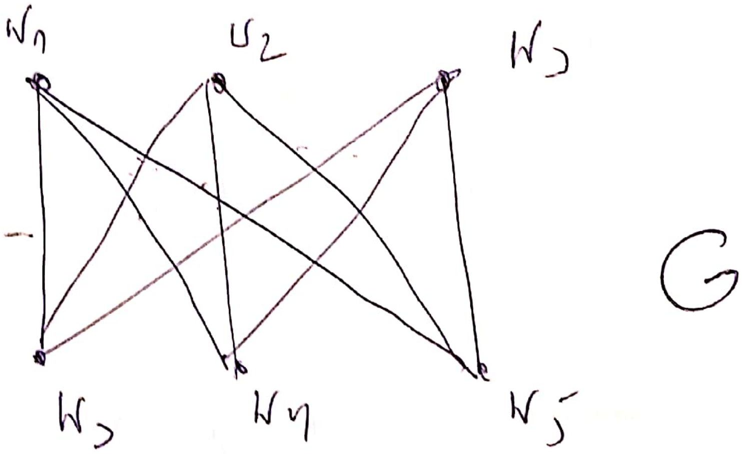
Uwaga. Kolejność: (n, m) nie jest istotna, bowiem $K_{n,m} \cong K_{m,n}$.

Zachodzi III tw. Eulera

Tw. III (Euler). Jeśli G jest planarnym grafem dwudzielnym, to $|K(G)| \leq 2|W(G)| - 4$.

Zad. 1 c.d (L.10).

Weźmy graf $K_{3,3}$ oraz jego standardową reprezentację



Gdyby G był planarny, to musielibyśmy zgodnie z III tw. E.

$$|K(G)| \leq 2|W(G)| - 4.$$

Ale $|K(G)| = 9$, $|W(G)| = 6$, co oznacza, że

tak nie jest.

Zauważmy, że jeśli z $G = K_{3,3}$ usuniemy jedną krawędź to w takim $\tilde{G}$

$$|K(\tilde{G})| = 2|W(\tilde{G})| - 4,$$ co oznacza, że

nie ma powodu twierdzić, że $\tilde{G}$ nie jest planarny.

Podobną sytuację mielibyśmy dla grafu K_5.

Aby rozstrzygnąć tę kwestię, potrzebny jest jeszcze fakt (też to wniosek z tw. Eulera).

Niech $l(G)$ oznacza ~~obwód~~ grafu G, czyli najmniejszą liczbę krawędzi złożonych z różnych wierzchołków składających się na cykl.

Wtedy

$$\boxed{(l(G)-2)|K(G)| \leq l(G)(|W(G)|-2)}$$

o ile graf jest planarny.

Zauważ, że dla $G: K_5$ bez krawędzi mamy:

$$l(G)=4, \quad K(G)=9, \quad W(G)=5$$

zatem, gdy G byłby planarny, to byłaby prawdą, że

$$(4-2)\cdot 9 \leq 4(5-2)$$

$$18 \leq 12 \text{. Sprzeczność.}$$

Proszę zrobić podobną analizę dla $K_{3,3}$ bez jednej krawędzi.

W zbiorze zadań, w zadaniu 6.1.22. przedstawiona jest ilustracja tzw. grafu Petersena.

Sprawdzę (zad 2), czy ma on reprezentację planarną.

Graf Petersena jest grafem spójnym.

Dla każdego grafu spójnego zachodzi tw. Eulera o stopniu regionu.

Definicja, jeśli R jest regionem G, to

deg(R) = # krawędzi na jakie natrafimy obchodząc ten region wzdłuż jego brzegu.

Ilustracja to przykład 6.1.21 ze zbioru zadań.

Tw. Eulera mówi, że dla grafu spójnego G:

$$\underbrace{\sum \deg(R_i)}_{\text{suma po wszystkich regionach}} = 2|K(G)| \quad (*)$$

Dla grafu Petersena mamy: $|W(G)| = 10$, $|K(G)| = 15$

Stosując tw. Eulera o regionach (str. 2) mówimy, że G ma $15 - 10 + 2 = 7$ regionów (gdyby był planarny!)

Dalej, dla każdego regionu $R_1, R_2, \ldots, R_7$ mamy $\deg(R_j) \geq 5$ (dlaczego?).

Zatem

$$\sum_{j=1}^{7} \deg(R_j) \geq 7 \cdot 5 = 35 > 2|E(G)| = 2 \cdot 15 = 30,$$

co pokazuje, że nie jest spełniona równość (*).

Oznacza to, że tw. Eulera o regionach nie zachodzi dla grafu Petersena. Zatem nie jest on planarny.

//.