Kurs: Matematyka Dyskretna

Forma: Ćwiczenia

Tryb: Online 28.04.2021

**Temat**: Metody zliczania cd. Rekurencje.

**Problem 1.** (4.1.23 [PRJ])

Uzasadnić, że w zbiorze $A \subset \mathbb{Z}$, gdzie $|A| = p+1$ $(p \geq 2)$ istnieją co najmniej dwie liczby $a, b \in A$, że $a \equiv b \pmod{p}$.

Wykorzystaj ZSD:

niech $f : A \to \underbrace{\{0, 1, \ldots, p-1\}}_{= B} \ (= \mathbb{Z}_p)$

$A \ni a \to f(a) = r_p(a)$

Wykażę, że $\exists\, i \in \mathbb{Z}_p$, że $|f^{-1}(\{i\})| \geq 2$.

Ale $|B| = p < p+1 = |A|$, dlatego mogę skorzystać z wersji ZSD.

Problem 2.

Znaleźć liczbę rozwiązań nierówności

$$x+y+z+w<5 \text{ w zbiorze } \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}.$$

Niech $A$ oznacza ten zbiór.

Dla $k \in \{1,2,3,4\}$, niech

$A_k$ - zbiór rozwiązań równania

$$x+y+z+w=k.$$

Zauważmy, że $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Z ZA,

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|.$$

Proszę dokończyć.

Problem 2.

Rozwiąż rekurencję

(*) $a_n = 5a_{n-1} - 3a_{n-2}, \quad n \geq 3$,

gdzie $a_1 = 1, a_2 = -1$

Skorzystajmy z metody równania charakterystycznego dla (*)

(**) $x^2 = 5x - 3 \iff \underbrace{x^2 - 5x + 3 = 0}$ (RCH

Wyznaczmy rozwiązania (**):

$\Delta = 25 - 12 = 13$

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}.$

Dlatego $\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} \ \forall n \geq 1$

$\underbrace{a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n}$

Stałe $C_1, C_2$ wyznaczymy z warunków inicjujących $(a_n)$:

$a_1 = 1, \quad a_2 = -1$

Mamy odpowiednio.

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 x_1 + C_2 x_2 \\ -1 &= C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 \end{aligned}\right\}.$$

Proszę rozwiązać ten układ.

<u>Przykład 4.</u> (5.2.15)

Wiedząc, że $x^2 - 4x + 4 = 0$ jest (RCH) pewnego ciągu rekurencyjnego $(a_n)$, gdzie $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Napisać tę rekurencję, a następnie rozwiązać ją.

Mamy kolejno:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \iff x^2 = 4x - 4, \quad \text{skąd}$$

$(a_n)$ musi zadać rekurencja:

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \quad n \geq 1.$$

Proszę rozwiązać tę rekurencję.

Problem 5.

Niech $(f_n)_{n\geq 0}$ oznacza ciąg Fibonacciego, gdzie

$f_0 = 0$, $f_1 = f_2 = 1$,

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \geq 1$$

~~Udowodnij, że~~

$\cancel{f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_{n-1}}$

Niech $m \geq 2$.

Wtedy z def ciągu Fibonacciego:

$$f_{m+2} = f_{m+1} + f_m = (f_m + f_{m-1}) + f_m$$

$$= 2f_m + f_{m-1} = f_m f_3 + f_{m-1} f_2,$$

czyli $f_{m+2} = f_m f_3 + f_{m-1} f_2, \ \forall m \geq 2$

Stosując ZIM uogólnić tę równość na przypadek $f_{m+n}$, $n \geq 2$, czyli

$f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$ (Fakt 4.5.5 (Ross))

Problem 6

Niech $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$

Udowodnij, że $\forall_{n \geq 0} \; F^{n+2} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix}$,

gdzie $(f_n)_{n \geq 1}$ c. Fibonacciego.

Indukcja względem $n \geq 0$:

Dla $n=0$ $F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{bmatrix}$ ✓

Załóżmy, że dla $k \geq 0$ $F^{k+2} = \begin{bmatrix} f_k & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_{k+2} \end{bmatrix}$

Biorąc $k \to k+1$

$F^{(k+1)+2} = F^{(k+2)+1} = F^{k+2} F \overset{\text{zał}}{=} \begin{bmatrix} f_k & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k + f_{k+1} \\ f_{k+2} & f_{k+1} + f_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_{k+2} \\ f_{k+2} & f_{k+3} \end{bmatrix}$ //.

Problem 7

Uzasadnić, że dla ciągu Fibonacciego $(f_n)$ mamy: (wzór CASSINIEGO)

$$f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^n \quad n \geq 1.$$

Skorzystamy z rozw. Problemu 6:

wiemy, że

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+2}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix}}_{B}.$$

Oczywiście $\det A = \det B = f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2$

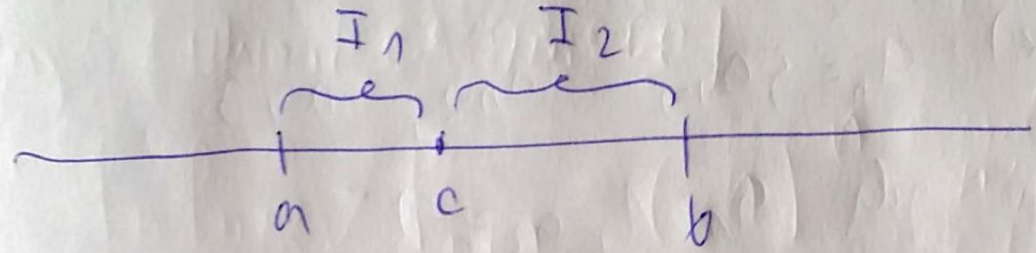
Ale $\det A = \left(\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{n+2} = (-1)^{n+2}$

Dlatego $(-1)^{n+2} = f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2$, skąd

$$f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^n (-1)^2 = \underline{\underline{(-1)^n}}.$$

Problem 8 (złota proporcja).

Weźmy odcinek $I = [a,b]$




Niech $c \in I$, $c \notin \{a,b\}$ taki, że

$$\frac{c-a=|I_1|}{b-c=|I_2|} = \frac{b-a=|I|}{c-a \quad |I_1|}.$$

Wtedy mówimy, że c wyznacza ZŁOTY PODZIAŁ $I$.

Uzasadnić, że $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Wsk. [str 155 [RR]].

Problem 9.

Uzasadnić, że $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$

Problem 10.

Dla ciągu Fibonacciego $(f_n)$

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = (\varphi)$$

↳ liczba Fidiasza

Przeczytać! (Fakt 4.5.1 [RD])

Problem 11.

Udowodnić, że dla c. Fibonacciego $(f_n)$

$$f_n \mid f_{kn}, \quad k \geq 1, \quad n \geq 1.$$

Wsk.: zastosować ZIM.

## Problem 12

Ciąg $(f_n)_{n\geq 1}$ Fibonacciego ma właściwości pozwalające na reprezentowanie liczb $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Podstawą tej reprezentacji jest twierdzenie ZECKENDORFA (Tw. 4.5.2 [RR]), które mówi, że

$$\forall_{n\geq 1} \ \exists! \ f_{k_1}, \dots, f_{k_r}$$

$$n = f_{k_1} + f_{k_2} + \dots + f_{k_r}, \text{ gdzie}$$

$$2 \leq k_r, \ k_r + 2 \leq k_{r-1}, \ \dots, \ k_2 + 2 \leq k_1$$

Np. (patrz. P.4.5.7 [RR])

$$350 = \underbrace{f_{13} + f_{11} + f_8 + f_5 + f_3}_{\text{odstępy } \geq 2} =$$

$$= 0\cdot f_2 + 1\cdot f_3 + 0\cdot f_4 + 1 f_5 + 0\cdot f_6 + 0\cdot f_7 + 1\cdot f_8 + 0\cdot f_9 + 0\cdot f_{10} + 1\cdot f_{11} + 0 f_{12} + 1 f_{13} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$

Wyszczególnienie linii n= 457

(patrz. P.4.5.7 [RR])