Kurs MD - ćwiczenia

Tryb on-line

Zajęcia: 17.02/24.02 / dr inż. Ryszard Rębowski

Temat. Logika matematyczna jako implementacja Algebry Boole'a

Sprawy organizacyjne

- zajęcia są obowiązkowe
- odbywają się zgodnie z obowiązującym harmonogramem
- platforma: GSuite → classroom MD-ćwiczenia
- zaliczenie formy: na ocenę, 2 kolokwia
- sposób realizacji: - z wyprzedzeniem kilkudniowym na stronie wykładowcy (inf. na wykładzie) będą pojawiały się materiały do zajęć (obowiązuje zbiór zadań wykładowcy! i książka)
  - będą tam pokazane metody i techniki stosowane w MD
  - czyli problemy do samodzielnego rozwiązania
  - można konsultować swoje prace z wykładowcą za pomocą e-mail.

Lista problemów i zadania

Uwaga: Sprawdzamy wart. logicznej zdania metodą tabeli logicznej student robi sam!
Obowiązuje numeracja ze Zbioru

(1) 1.2.3

(2) 1.2.4.

(3) 1.2.5

(4) 1.2.6

(5) 1.2.10

(6) 1.2.18

(7) Analiza 2.1.1.13 } samodzielnie!

(8) 1.1.7

Uwagi n/t zadań (1) – (8)

(1) Z założenia zdania p oraz $(q \to r)$ są odnośne, czyli mają te same wartości logiczne oraz zdanie $p \wedge q \to 0$ jest prawdziwe.

Na tej podstawie mamy określić w. logiczną zdania

$$r = [(p \to q) \to p] \vee [q \wedge (\neg p)]$$

Metoda 1 (bezpośrednia)

Nie modyfikujemy zdania r!

Ponieważ zdanie $q \to 1$ jest zawsze prawdziwe,

z zatem $p \equiv 1$.

Ponieważ $[(p \wedge q) \to 0] \equiv 1$, więc

$p \wedge q$ musi być fałszem. Stąd z uwagi, że

$p \equiv 1$, $q \equiv 0$.

Zdanie r powstało z p i q. Znając wartości logiczne p i q, ustalimy wartość r.

Prosty dokończyć.

Metoda 2. Stosując tautologie (str. 5-6), można za pomocą tzw. RACHUNKU ZDAŃ uprościć postać zdania r.

N1

$$(p \to q) \to p \stackrel{?}{\equiv} (\neg p \vee q) \to p \stackrel{?}{\equiv}$$

$$\neg(\neg p \vee q) \vee p \stackrel{?}{\equiv} (p \wedge \neg q) \vee p \equiv$$

$$\stackrel{?}{\equiv} (p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \equiv p \wedge (\neg q \vee p)$$

Dlatego

$$r \equiv [p \wedge (\neg q \vee p)] \vee [q \wedge \neg p] \stackrel{?}{\equiv}$$

$$(p \vee (p \wedge \neg q)) \vee (q \wedge \neg p) \stackrel{?}{\equiv}$$

$$p \vee ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$$

Prawa w miejscach „?" ustalić jako tautologię decyduje o tym!

Zatem wystarczy ocenić $\tilde{r} = p \vee ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$

Ale $p \equiv 1$, więc $\tilde{r} \equiv 1$ ✓.

(2) Z założenia $p \equiv 0$.

Weźmy wyrażenia z zadania

$$\underbrace{[(p \to q) \lor p]}_{w_1} \equiv \underbrace{(q \land p)}_{w_2}$$

Mamy rozstrzygnąć wartości logiczne zdania

$w_1 \equiv w_2$, czyli są równoważne.

Dla w_2 mamy z założenia: $w_2 \equiv 0$

Dla w_1, ponieważ

$(p \to q) \equiv 1$ (bo $p \equiv 0$)

$w_1 \equiv 1$.

Dlatego $w_1 \equiv w_2$ jest fałszywe!

Przypadki (1) i (3) samodzielnie.

③ z założenia

$(q \to p) \equiv 1$

oraz

$(p \to q) \equiv 0$

WNIOSEK ① p, q mają różne wartości logiczne, (bo nie są jednakowe).

Np. 2 wynika, że $p \equiv 1$, $q \equiv 0$

Prosty dokończ!

④ Weźmy np. ① (② samodzielnie).
Mamy sprawdzić, że

$$\forall_{p, q \in L} \; [p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$$

Metoda 1 (bezpośrednia).
Wystarczy sprawdzić, że „z prawdy wynika prawda"

Niech zatem

$$[p \wedge (p \to q)] \equiv 1$$

Wtedy $\underbrace{p \equiv 1 \text{ oraz } (p \to q) \equiv 1}_{\substack{\text{stąd} \\ \underline{q \equiv 1}}}$

<u>Metoda 2 (rachunek zdań)</u>

Niech $r = [p \wedge (p \to q)] \to q$.

Wtedy

$$r \equiv [p \wedge (\neg p \vee q)] \to q \overset{?}{\equiv}$$

$$[(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)] \to q \overset{?}{\equiv}$$

$$(p \wedge q) \to q \equiv \ldots$$

<u>Proszę dokończyć</u>

(5) Niech $r = [(p \to s) \to \neg(q \wedge s)] \wedge \neg(q \wedge s)$

$$r \overset{?}{\equiv} [\neg(p \to s) \vee (q \wedge s)] \wedge \neg(q \wedge s)$$

$$\overset{?}{\equiv} [\neg(p \to s) \wedge \neg(q \wedge s)] \vee [(q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)]$$

$$\overset{?}{\equiv} [(p \wedge \neg s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \vee 0$$

$$\overset{?}{\equiv} (p \wedge \neg s \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg s)$$

<u>Proszę dokończyć!</u> !

(6) (1) mamy formę zdaniową φ, gdzie

$\varphi(x) =$ „$x^2 < x$"

Określmy dziedzinę: $D_\varphi = \mathbb{R}$

Mamy „zrobić" z φ zdanie prawdziwe

Jak mamy te 3 metody:

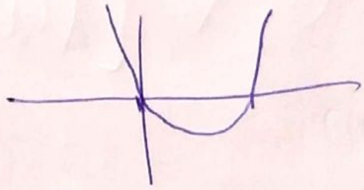
$$\varphi(x_0), \quad \forall_{x\in\tilde{D}_\varphi} \varphi(x), \quad \exists_{x\in\tilde{D}_\varphi} \varphi(x)$$

gdzie $\tilde{D}_\varphi \subset D_\varphi$

W <u>tym celu</u>, rozwiążmy <u>nierówność</u>

$$x^2 < x \iff x^2 - x < 0 \iff$$

$$x(x-1) < 0$$



$$\iff x \in (0,1) = \tilde{D}_\varphi$$

Zatem $\left(\forall_{x\in(0,1)} x^2 < x\right) \equiv 1.$

Proszę zrobić samodzielnie (e) i (f).

Zobaczmy teraz jak mają się funkcje OR, AND, NOT, IF i inne (np. XOR, DIF, IFF, NAND, NOR)

do języka programowania, do konkretnej do instrukcji

(*) if ... then ... else ...

Problem 1

Niech dla zdań $a, b \in \mathcal{L}$

$$(a,b) \longrightarrow OR(a,b) \stackrel{df}{=} a \vee b$$

(**) Przedstawić OR za pomocą instrukcji (*) i uzasadnić prawdziwość tej reprezentacji.

Problem 2

$$(a,b) \longrightarrow AND(a,b) \stackrel{df}{=} a \wedge b$$

Wykonać polecenie (**).

Problem 3.

$$a \longrightarrow NOT(a) \overset{df}{=} \neg a$$

Wykonać (xx)

Problem 4

$$(a,b) \longrightarrow IF(a,b) \overset{df}{=} (a \to b)$$

Wykonać (xx)

Problem 5

$$(a,b) \longrightarrow XOR(a,b) \overset{df}{=} (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$$

Wykonać (xx)

Problem 6.

$$(a,b) \longrightarrow DIF(a,b) \overset{df}{=} a \wedge \neg b$$

Wykonać (xx)

Problem 7

$(a,b) \longrightarrow IFF(a,b) \stackrel{df}{=} (a \to b) \wedge (b \to a)$

Wykonał (✓)

Problem 8

NAND - dysjunkcja (f Sheffera)

$(a,b) \longrightarrow NAND(a,b) \stackrel{df}{=} \neg(a \wedge b) = (a | b)$

wykonał (✓)

Problem 9

NOR (binegacja, f. Peirce'a)

$(a,b) \longrightarrow NOR(a,b) \stackrel{df}{=} \neg(a \vee b) = (a \downarrow b)$

Uwaga. Problemy 1-9 są b. ważne.

Pokazują istotę stałej bazowej – jej jednoznaczności z punktu widzenia konstrukcji (*)

Są jednocześnie testem na zrozumienie logiki predykatowej jak na wykładach