M.D. ćwiczenia

Forma zajęć: On-line

#4

Problemy i zadania

1) Udowodnić, że $\forall A, B, C \subset X$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

2) Wyreprezentować liczby $q = \frac{5}{19}$, $q = \frac{24}{17}$ za pomocą ułamków łańcuchowych.

3) Liczby z 2) przedstawić w postaci ułamków dziesiętnych (podać algorytm!)

4) Wyznaczyć zbiór $P(X)$, jeśli $X = \{x, y, z\}$

5) Udowodnić, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

6) Dla $a, \tilde{a}, b, \tilde{b} \in X$ definiujemy dwa zbiory

$$\mathcal{A} \overset{df}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}, \quad \tilde{\mathcal{A}} \overset{df}{=} \{\{\tilde{a}\}, \{\tilde{a}, \tilde{b}\}\}$$

Kiedy $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$?

(7) Wzór dwumienny Newtona

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} \ \forall_{n \geq 1} \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Udowodnić to. (P. 1.3.1 [RR])

(8) Nierówność Bernoulliego

$$\forall_{a > -1} \ \forall_{n \geq 2} \ (1+a)^n > 1+na$$

Udowodnić to (P.2.3.2 [RR])

9) Uzasadnić, że dla $A, B \subset X$, $A \cap B$ jest największym zbiorem <u>zawartym jednocześnie</u> w A i B, $A \cup B$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym A i B.

10) Algorytm reprezentowania pewnych liczb niewymiernych przez ułamki łańcuchowe nieskończone.

<u>Zadanie</u>: Będą to liczby $r \in \mathbb{R}_+$ postaci

$r = \sqrt{k^2+1}$, $k \in \mathbb{N}$, np. $\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1}$
$\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1}$

Krok 1. Identyfikacja liczby r (ustalić wartości k)

$$r = \sqrt{k^2+1}$$

Krok 2. $r^2 = k^2+1 \iff$

$$r^2 - k^2 = 1 \iff$$

$$(r-k)(r+k) = 1 \iff$$

$$r - k = \frac{1}{r+k} \iff$$

$$(*) \quad r = k + \frac{1}{r+k}$$

Krok 3. W $(*)$ (prawa strona) podstawiamy $r = k + \frac{1}{r+k}$

$$(**) \quad r = k + \cfrac{1}{k + k + \cfrac{1}{r+k}} =$$

$$= k + \cfrac{1}{2k + \cfrac{1}{r+k}}$$

Powtarzamy krok 3.

Zastosować procedurę dla $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$.

Rozwiązania i uwagi

1°. Weźmy np.

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C), \quad A,B,C\subset X.$$

Jak wiemy oznacza to, iż

$$\forall_{\substack{x\in X\\ y\in X}} \left[(x,y)\in A\times(B\cap C) \iff (x,y)\in (A\times B)\cap(A\times C) \right]$$

Ustalmy $(x,y)\in X\times X$.

Wystarczy pokazać, iż zdania

$$p \overset{df}{=} (x,y)\in A\times(B\cap C)$$

$$q \overset{df}{=} (x,y)\in (A\times B)\cap(A\times C)$$

są równoważne.

Podobnie dla drugiego przykładu.

Proszę dokończyć:

2) Niech $q = \frac{5}{19}$

Krok 1. $q = \frac{1}{\frac{19}{5}}$

Krok 2. zasada podzielności:

$\frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5}$

Krok 3 $q = \frac{1}{4 + 4/5} = \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{5}{4}}}$

i powtórzmy Krok 2 $\to$ Krok 3.

Proszę dokończyć.

3) $q = \frac{5}{19}$ [patrz str. 41-42 [RL]]

Krok 1. Identyfikacja przypadku, tutaj

0, ...

Krok 2. 5.10 i zasada podzielności

$50 = 2 \cdot 19 + 12$

częściowy wynik

$0,2\ldots$

Krok 3. $12 \cdot 10 = 6 \cdot 19 + 6$

częściowy wynik

$0,26\ldots$

i powtarzamy:

$6 \cdot 10 = 3 \cdot 19 + 3$

częściowy wynik

$0,263$ itd.

Proszę dokończyć!

4). Podejście standardowe:

$$P(X) = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{|X|},$$

gdzie $\mathcal{A}_k = \{A \subset X : |A| = k\}$

$k = 0, 1, 2, \ldots, |X|$.

U nas $|X| = 3$, dlatego

$$P(X) = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 .$$

Proszę dokończyć.

5) Najprostszym dowodem jest „poprzez sprowadzenie do sprzeczności".

<u>Uwaga.</u> Zad 10 zawiera inny dowód: oparty na konstrukcji!.

Załóżmy, że $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Wtedy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$

Ponadto możemy założyć, że p, q są <u>względnie pierwsze</u> (dzielą się obie ~~przez~~ <u>tylko</u> przez 1).

Wtedy $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff q\sqrt{2} = p \iff$

$2q^2 = p^2.$

Zatem p^2 parzysta, skąd p parzysta,

czyli $p = 2k$ dla pewnej $k \in \mathbb{N}$

Dalej $2q^2 = (2k)^2 \iff$

$2q^2 = 4k^2 \iff$

$q^2 = 2k^2.$

Stąd q^2 parzysta $\Rightarrow q$ parzysta.

Sprzeczność!, a p i q były względnie pierw.

Dlatego $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ FAŁSZ,

dlatego $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6) Samodzielnie.

Uwaga. To jest def. pary uporządkowanej danej przez K. KURATOWSKIEGO, czyli

$$(a,b) \overset{\text{def.}}{=} \{\{a\}, \{a,b\}\}, \quad a,b \in X$$

(7) ZIM – przeczytać 2.3.1 [RR].

(8) ZIM – przeczytać 2.3.2 [RR].

(9) Pokażemy dla $A \cap B$; $A, B \subset X$.
Wystarczy pokazać, że ~~[illegible]~~ dla $C \subset X$

$$(\underbrace{\cancel{A}}_{C \subset A} \wedge \underbrace{\cancel{B}}_{C \subset B}) \Rightarrow C \subset A \cap B$$

Niech więc dla $C \subset X$ będzie prawdą, że

(*) $C \subset A \wedge C \subset B$.

Pokażmy, że $C \subset A \cap B$.

W tym celu weźmy $x \in X$ i załóżmy, że prawdą jest, że $\underline{x \in C}$.

Ale wtedy, z (*)

$x \in A \wedge x \in B$.

Pokazaliśmy, że

$$\forall_{x \in X} \; (x \in C) \Rightarrow \left((x \in A) \wedge (x \in B) \right)$$

co oznacza, że $C \subset A \cap B$

Dla „$\cup$" samodzielnie.

(10) Zastosować algorytm dla podanych liczb. Wykonać 5 rekurencji.