Kurs Mat. Dyskretna

Forma - ćwiczenia

Tryb - on line

Temat: Rodziny zbiorów. Wprowadzenie do t. relacji;

Problemy

1) P.2.4.2 ([RR]).

2) Niech $\mathcal{A} = \{A_t, t > 0\}$, gdzie $A_t \subset \mathbb{R}$

$A_t = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1/t\}$.

Wyznacz $\bigcup \mathcal{A}$, $\bigcap \mathcal{A}$

3) Dla $\mathcal{A} \subset P(X)$, $X = [0,1]$ mamy

$\mathcal{A} = \{[0, 3/4], [1/8, 1]\}$.

Uzupełnić $\mathcal{A}$ do algebry.

4) Wiadomo, że $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, gdzie

$\forall_{m,n \in \mathbb{N}} \; mRn \Leftrightarrow m+n = 9$

Zapisać R jako zbiór.

5) $R \subset A \times B$

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(a_1, 1), (a_2, 2), (a_2, 5), (a_3, 4), (a_4, 3)\}$

Czy $A \ni a \longrightarrow R(a) = b \in B$

jest funkcją?

6) Dla $R \subset A \times A$, $A \subset X$, definiujemy

$R^{\leftarrow} \subset A \times A$

$$\forall_{a,b \in A} \; a R^{\leftarrow} b \Leftrightarrow b R a$$

Wyznacz $R^{\leftarrow}$ z zad. 5.

7) Niech $R \subset A \times A$. Powiemy, że

a) R jest zwrotna (RZ)

$$\forall_{a \in A} \; a R a$$

b) R jest symetryczna (RS)

$$\forall_{a,b \in A} \; a R b \Rightarrow b R a$$

c) R j. asymetryczna (RA)

$$\forall_{a,b\in A} \; aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$$

d) R j. przechodnia (RP)

$$\forall_{a,b,c\in A} \; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

Bierzemy $R \subset A\times A$, $A=\{0,1,2,3\}$

$$aRb \Leftrightarrow a+b=3$$

(*) Sprawdzić, czy R j. typu (a), (b), (c), (d)

8) $R\subset A\times A$, $A=\{1,3,6\}$

$R=\{(1,1),(1,3),(1,6),(3,6),(6,3),$ $(6,6)\}$

Wykonać polecenie (*).

9) $R \subset A \times A$.

Uzasadnić, że następujące warunki są równoważne:

(i) R ma (RS)

(ii) $R \subset R^{\leftarrow}$

(iii) $R = R^{\leftarrow}$.

(10) Na $A = \{1, 2, 3, 4\}$ def. $R \subset A \times A$:

$$aRb \Leftrightarrow |a - b| = 2$$

Wykonać polecenie (*).

(11) $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $\forall_{m,n \in \mathbb{N}}$ $mRn \Leftrightarrow 2 | (m+n)$

Wykonać polecenie (*).

Rozwiązania i uwagi.

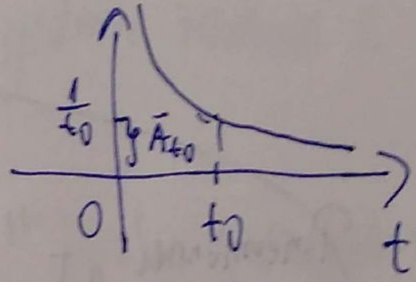
2) Niech $A_t = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1/t\} \in \mathcal{A}$

dla $t > 0$,

czyli $A_t = [0, 1/t]$ (przedział liczb, obustronnie domknięty).

Weźmy funkcję

$\mathbb{R}^+ \ni t \longrightarrow f(t) = \frac{1}{t}$,



co oznacza, że f jest malejąca.

Dalej (i) $\forall\, t > 0 \quad f(t) > 0$

(ii) $\lim_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$, $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$

$$\Downarrow$$

$$A_t \searrow \{0\} \qquad A_t \nearrow [0, +\infty)$$

Dalej $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{t>0} A_t = \bigcup_{t>0} [0, 1/t] = [0, +\infty)$,

bowiem $x \in \bigcup \mathcal{A} \iff \exists_{t>0}\; x \in A_t \iff \exists_{t>0}\; x \in [0, 1/t]$

oznacza, że dla dowolnego $x > 0$ biorąc $t_0 > 0$:

(5) $t_0 \le 1/x$, mamy $x \in A_{t_0}$.

Na podobnej zasadzie proszę wyznaczyć

$\bigcap \mathcal{A}$ a następnie <u>uzasadnić jej ważność</u>.

③ Dla $X = [0,1]$, niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, gdzie

$\mathcal{A} = \{ [0, 1/4], [1/8, 1] \}$.

$\mathcal{A}$ nie jest algebrą bowiem nie spełnia żadnego z 3 aksjomatów.

Dowód, (i) $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Dlatego uzupełniamy $\mathcal{A}$ o ten zbiór.

(ii)

(iii) Proszę <u>dokończyć</u>!

④ Niech $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$\forall_{m,n \in \mathbb{N}} \quad m R n \Leftrightarrow m+n = 9$

Mamy: $m R n \Leftrightarrow n = 9 - m$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, dlatego $m = 1 \rightarrow n = 8$, $m = 2 \rightarrow n = 7$ itd.

<u>Dokończyć</u>!

(5) Należy skorzystać z def funkcji.

(6) $R^{\in} = \{(1,a_1), (2,a_2), (5,a_2), (4,a_3), (3,a_4)\}$

(7) Niech $R \subset A \times A$, $A = \{0,1,2,3\}$

$aRb \Leftrightarrow a+b=3$

Wyznaczmy R: $b = 3-a$; $a, b \in A$,

czyli

$R = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\}$

Stąd (i) R nie jest (RZ)

(ii) R jest RS

(iii) R nie jest RA

(iv) R nie jest RZ

Uzasadnić!

(8) Mamy

$R = \{(1,1), (1,3), (1,6), (3,6), (6,3), (6,6)\}$

$R \subset A \times A$, $A = \{1,3,6\}$

- $(3,3) \notin R$ więc R nie jest (RZ)
- zdanie „$(1,3) \in R \rightarrow (3,1) \in R$" jest fałszywe, zatem R nie jest (RS)
- zdanie $\forall_{a,b \in A}\ aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$ jest fałszywe, stąd R nie jest RA

  DLACZEGO?
- R nie jest (RZ) Dlaczego?

(9) Niech $R \subset A \times A$.

Należy udowodnić, że

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii).$$

Załóżmy, że (i), czyli R jest (RS).

Weźmy $(a,b) \in R$. Z założenia

$(b,a) \in R \Leftrightarrow (a,b) \in R^{\leftarrow}$,

zatem $R \subset R^{\leftarrow}$ co dowodzi, że

$(i) \Rightarrow (ii)$

Na odwrót, jeśli zachodzi (ii) oraz

$(a,b) \in R$, to z (ii) $(a,b) \in R^{\leftarrow} \Leftrightarrow$

$(b,a) \in R$, co dowodzi (i).

Zatem $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Ale R jest (RS) $\Leftrightarrow$ $R^{\leftarrow}$ jest (RS), dlatego $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

(10) Nech

$$R \subset A \times A, \quad A = \{1,2,3,4\},$$

kde $aRb \Leftrightarrow |a-b| = 2$

Máme zatiaľ

$$R = \{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2)\}$$

Ďalej (i) R nie je (RZ)

(ii) R je (RS)

(iii) R nie je (RA)

(iv) R nie je (RP)

Zdôvodnite!

(11)

$R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\forall_{m,n \in \mathbb{N}} \quad mRn \iff 2 \mid (m+n)$

Z def. $(m,n) \in R \iff$ „obie liczby m, n są parzyste" **lub** „obie są nieparzyste".

Przemienność „+" $\Rightarrow$ R p' (RS) ($R = R^{-1}$)

Z powyższego R p' (RZ)

R nie p' (RA) (DLACZEGO?)

R z powyższego p' (RP) (DLACZEGO?)

(11)