Kurs: Matematyka DYSKRETNA

Forma: ćwiczenia

Tryb: Online, 14.04.2021

Temat: Porządki częściowe c.d. (porządkowe słownika)

Przykład 1.

Niech A skończony zbiór - alfabet, $S(A)$ - słownik powstały z A, λ - słowo puste.

Na $S(A) \cup \{\lambda\}$ definiujemy relację

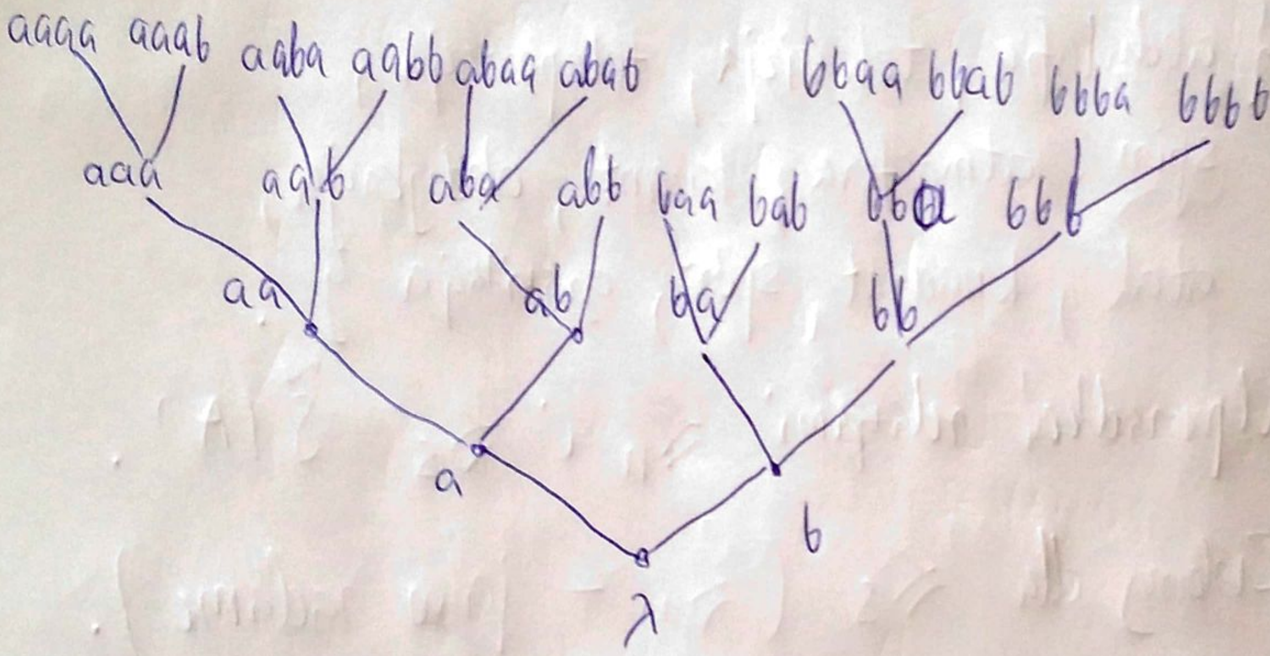
$$\forall_{s_1, s_2 \in S(A) \cup \{\lambda\}} \quad s_1 \preccurlyeq_n s_2 \equiv \exists_{s \in S(A) \cup \{\lambda\}} \quad s_1 s = s_2$$

Wiemy, iż $\preccurlyeq_n$ jest częściowym porządkiem i nie wymaga relacji na A. Nie jest natomiast porządkiem, jeśli $|A| \geq 2$.

Weźmy $A = \{a, b\}$.

Skonstruujmy krótko „poziomy" diagram Hassego.

iii)



Problem 2.

Uzasadnić, iż $\leq_n$ jest antysymetryczna.

Niech dla $s_1, s_2 \in S(A) \cup \{\lambda\}$

$s_1 \leq_n s_2 \wedge s_2 \leq_n s_1$.

Wtedy, z def. relacji $\preccurlyeq_n$ $\exists\, s, \tilde{s} \in S(A) \cup \{\lambda\}$, że

$s_2 = s_1 s \;\wedge\; s_1 = s_2 \tilde{s}$, czyli

$$s_2 = (s_2 \tilde{s}) s = s_2 (\tilde{s} s).$$

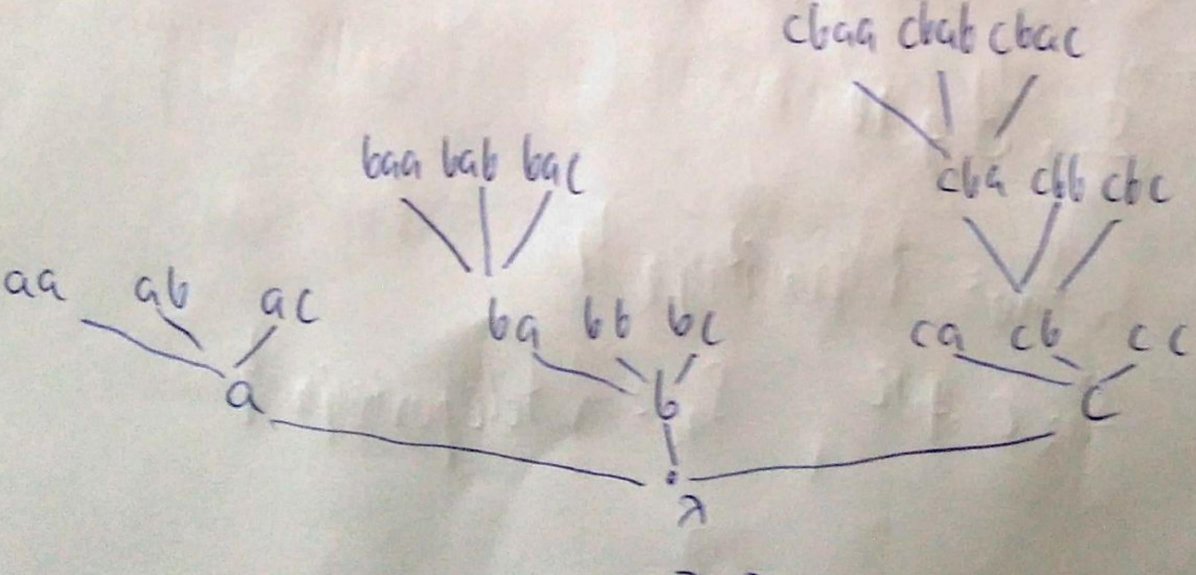
Stąd $\tilde{s} s = \lambda \Rightarrow \tilde{s} = s = \lambda$,

co oznacza, że $s_2 = s_1$.

Przykład 3.

Niech teraz $A = \{a, b, c\}$. Podać zasady konstrukcji diagramu Hassego dla relacji $\preccurlyeq_n$ na $S(A) \cup \{\lambda\}$.

itd.



Problem 4. (3.1.22 w [RR])

Niech A – zbiór wszystkich 3 literowych słów zbudowanych z liter a, b, ~~c~~, gdzie $a < b$ ~~< c~~.

Należy uporządkować A według $\preccurlyeq_L$.

Zaczniemy od przedstawienia A:

$A = \{aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb\}$

Z def $\preccurlyeq_L$ słowa zaczynające się od litery „a" są wcześniejsze od litery „b".

$\underbrace{\{aaa, aab, aba, abb\}}$ $\underbrace{\{baa, bab, bba, bbb\}}$

wśród tych wcześniej są te, które na drugim miejscu mają „a"

jak wcześniej

$\{aaa, aab\}, \{aba, abb\}$ $\{baa, bab\}$ $\{bba, bbb\}$

$aaa <_L aab <_L aba <_L abb <_L baa <_L bab <_L bba <_L bbb$

Problem 5.

Bierzemy Bin_n - zbiór wszystkich ciągów binarnych dł. n.

Zakładamy, że na zbiorze $\{0,1\}$: $0 < 1$.

Uporządkuj zbiór Bin_n relacją $\leq_L$.

Przedstawimy to uporządkowanie diagramem Hassego

Problem 6.

Na alfabecie A z relacją cz. porządku $\preceq_A$ budujemy słownik $S(A)$ i na jego uzupełnieniu o słowo puste $\{\lambda\}$ definiujemy relację $\leq_S$.

Jak mamy podejść do zadania, to na słownik patrzymy poprzez jego strukturę

$$S(A) = \bigcup_{k \geq 1} A^k \quad , A^k \text{ - słowa dł. } k \ ,$$

Wtedy $\leq_S|_{A^k} \equiv \leq_L^k$ i słowa dłuższe są dalej.

Neka $A = \{0, 1\}$, $0 <_A 1$.

Onda:

$$\lambda <_s \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{slova dl. 1}} <_s \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{slova dl. 2}} <_s \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{slova dl. 3}}$$

itd.

slova dl. 1 $\qquad$ slova dl. 2

$0 <_s 1 \qquad 00 <_s 01 <_s 10 < 11$

<u>slova dl. 3</u>.

$000 <_s 001 <_s 010 <_s 011 <_s 100 <_s$

$101 <_s 110 <_s 111$

<u>Uvaga</u>. Pomoću ovih primjera, relacije $\leq_n$ i $\leq_s$ <u>su RAZNE</u>!

Problem 7

Niech A – alfabet ~~[illegible]~~ łacińskich + polskie litery. uporządkowany „naturalnie”.

Ze słownika $S(A)$, wybieramy podsłownik

$\tilde{S}(A) = \{$ abdulafia, telewizja, teleportacja, spin, atmosfera, kwant, abdykacja, atak, kwadrat, spdr, grawitacja $\}$.

Uporządkować relacjami $\preccurlyeq_n$ i $\preccurlyeq_s$ $\tilde{S}(A)$.

Zrobimy dla $\preccurlyeq_s$ ($\preccurlyeq_n$ – jako zadanie).

Krok 1.

$\tilde{S}(A)$ zapisujemy standardowo (# słowa)

Mamy odpowiednio:

$S_4 \subset A^4$, gdzie

$S_4 = \{$ spdr, atak, spin $\}$

$S_5 \subset A^5$

$S_5 = \{$ kwant $\}$

$S_7 \subset A^7$

$S_7 = \{$ kwadrat $\}$

$S_9 \subset A^9$

$S_9 = \{$ abdukafia, abdykacja, telewizja, atmosfera $\}$

$S_{10} \subset A^{10}$

$S_{10} = \{$ grawitacja $\}$

$S_{12} \subset A^{12}$, $S_{12} = \{$ teleportacja $\}$

Krok 2.

Ustawmy wg. relacji $\preceq_s$ słowa ze zbioru S_k

$$S_4 \prec_n \prec_n S_5 \prec_n S_7 \prec_n S_9 \prec_n$$

$$\prec_n S_{10} \prec_n S_{12}$$

Krok 3.

Porządkujmy relacją $\preceq^j_L$ każdy w zbiorze S_j

np. S_9:

$$\underbrace{ab}dulafia \underset{\prec_s}{\overset{=}{\prec^9_L}} \underbrace{abd}ykacja \underset{\prec_s}{\overset{=}{\prec^9_L}} atmosfera \underset{\prec_s}{\overset{=}{\prec^9_L}} telewizja$$

Problem 8.

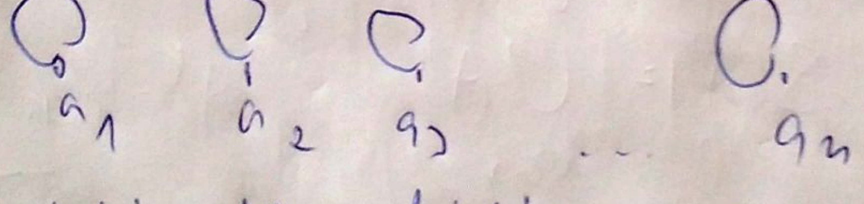
Czy na $A \neq \emptyset$ można zdefiniować relację, która byłaby jednocześnie r. równoważności i częściowo porządku?

Rozw.

Oczywiście jest to problem z występowaniem jednocześnie własności RS & RA.

Jest to możliwe tylko wtedy, gdy będą mieli sytuację ~~...~~ jak niżej:

Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$



Mamy wtedy: klasy abstrakcji są jednoelementowe czyli n takich 1-element.