Kurs: Matematyka DYSKRETNA
Forma: Ćwiczenia
Tryb Online: 15.04.2021

Temat. Porządkowanie słowników c.d. Wprowadzenie do METOD ZLICZANIA.

Niech A, $S(A)$ jak na ćw. z 14.04.
Załóżmy, że na A mamy co najmniej częściowy porządek $\preccurlyeq_A$.
Na $S(A) \cup \{\lambda\}$ definiujemy trzeci sposób porządkowania relacją Słownikowy Porządek Leksykograficzny (SPL) $\preccurlyeq_L$.

$$\forall_{s_1, s_2 \in S(A) \cup \{\lambda\}} \quad s_1 \preccurlyeq_L s_2 \equiv$$

albo:

1° $\exists s \in S(A) \cup \{\lambda\}$ $s_2 = s_1 s$, albo

2. $s_1 = xs$, $s_2 = xs'$ i pierwsza litera słowa s poprzedza pierwszą literę s', gdzie x jest z $S(A) \cup \{\lambda\}$.

Problem 1

Niech $A = \{a, b, c\}$, gdzie $a <_A b <_A c$

Weźmy słowa

$$s_1 = abbcabc$$

$$s_2 = abbccab$$

Porównaj je relacją $\leq_L$.

Zauważmy, że warunek 1° def. nie zachodzi.

Ale
$$s_1 = x\overbrace{abc}^{s},$$
$$s_2 = x\overbrace{cab}^{s'}, \text{ gdzie } x = abbc$$

Ponieważ $a <_A c$, to $s_1 <_L s_2$.

Problem 2.

Udowodnić, że $\leq_L$ jest antysymetryczna.

Ćwiczenie.

Problem 3.

Wiemy, że $\leq_n$ i $\leq_s$ są różne.

Pokazać, że $\leq_L$ różni się od $\leq_n$ i $\leq_s$.

Wsk.

Rozważ $A = \{a, b\}$, $a <_A b$.

Problem 4.

Weźmy $A, B \subset X$. Powiemy, że A, B są <u>równoliczne</u>, jeśli

$$\exists\, f : A \xrightarrow[na]{1-1} B .$$

Na $P(X)$ definiujmy relację

$$A\,R\,B \equiv A \text{ i } B \text{ są równoliczne}.$$

Udowodnić, że R jest relacją równoważności.

Wtedy

$[A]_R$ nazywamy liczbę kardynalną

Np.

Klasa abstrakcji zbiorów jednoelementowych $\{x_0\}$, $x_0 \in X$ definiuje liczbę kardynalną, którą oznaczamy 1.

Piszemy wtedy $|\{x_0\}| = 1$.

I ogólnie dla $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \geq 1$

klasa abstrakcji $[A]_R$ jest liczbą kardynalną n.

WNIOSEK Liczby kardynalne (skończone): $1, 2, \ldots, n$ zapisujemy za pomocą liczb ze zbioru $\mathbb{N}$.

Niech teraz $A \subset X$ ~~[illegible]~~ oraz

załóżmy, że $\exists f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$

Wtedy będziemy mówili, że A jest przeliczalny, a liczbę kardynalną $[N]_{\approx}$ oznaczamy $\aleph_0$ (alef ZERO) i często

$$|\mathbb{N}| = |A| = \aleph_0$$

~~[illegible]~~ Jak mamy $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ i $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$

Udowodnić, że $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ są równoliczne.

Definiujemy funkcję

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(k) = \begin{cases} 2k & k > 0 \\ 2(-k) - 1 & k < 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

Uzasadnić, że f jest 1-1 i „na", co dowodzi, że $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

Problem 5.

1) Udowodnić, że zb. l. parzystych jest równoliczny ze zbiorem l. nieparzystych.

2) Udowodnić, że zb. liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny.

Wsk. 1° Wystarczy zająć się $\mathbb{Q}^+$ (l. wym. dodatnie).

2° Weźmy tabelę

	1	2	3	4	...	n
1	1	$1/2$	$1/3$	$1/4$		$1/n$
2	2	1	$2/3$	$2/4$	...	$2/n$
3	3	$3/2$	1	$3/4$	...	$3/n$
4	4	$4/2$	$4/3$	1	...	$4/n$
⋮						
n	n	$n/2$	$n/3$	$n/4$	...	1

Zauważ, że istnieje prosty sposób ustawienia wszystkich liczb z tabeli (czyli $\mathbb{Q}^+$) ustawienia w ciąg:

$$1,\ 2,\ 1,\ 1/2,\ 3,\ 3/2,\ 1,\ 2/3,\ 1/3\ \dots$$

OPISAĆ TĘ METODĘ i uzasadnić poprawność.

Problem 6.

Weźmy ciąg liczby $(a_n)_{n\geq 1}$, czyli

$$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow a_n \in \mathbb{R}.$$

Powiemy, że $(a_n)_{n\geq 1}$ jest dany przez REKURENCJĘ, jeśli $\exists\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$\forall_n \; a_{n+1} = f(a_n), \text{ gdzie } a_1 = a$$

jest dane.

Uzasadnij, że ciąg arytmetyczny i geometryczny są dany przez rekurencję.

Problem 7.

Niech $n! = \begin{cases} 1, & n = 0; 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & n \geq 2 \end{cases}$

Uzasadnij, że $a_n = n!$ jest ciągiem rekurencyjnym.

Problem 8.

Wzory konstrukcji (TRÓJKĄT PASCALA)

			1				$n=0$
		1		1			$n=1$
	1		2		1		$n=2$
1		3		3		1	$n=3$

itd.

Uzasadnić, że

(i) $\forall_{n \geq 0}$ suma wszystkich liczb z n-tego wiersza wynosi 2^n

(ii) Wiersz n-ty wiersz

$$1, W_1^n, W_2^n, \dots, 1$$

Uzasadnić, że $W_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$1 \leq k \leq n$$

(iii) Zinterpretować zależność

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

korzystając z Trójkąta PASCALA.

Problem 9.

Niech Bin_m - zbiór wszystkich ciągów binarnych dł. m. Dla $1 \leq k \leq m$, niech

$S_k \subset Bin_m$, gdzie

$c \in S_k \equiv c$ zawiera dokładnie k-jedynek.

Oblicz $|S_k|$.

Wsk. Biorąc X, gdzie $|X| = m$ oraz $P(X)$. Z $P(X)$ wybieramy rodzinę

$\mathcal{A}_k = \{A \subset X : |A| = k\}$.

Pokazać, że $\mathcal{A}_k$ i S_k są równoliczne.

Dlatego $|S_k| = |\mathcal{A}_k| = \binom{m}{k}$