Kurs: Matematyka Dyskretna
Forma: ćwiczenia
Tryb: On Line 7.03.

Temat. Omówienie kolokwium z dn. 31.03.2021.
T. relacji c.d.

Zadania Gr I

(1) Mamy sprawdzić, czy zdanie złożone jest tautologią, gdzie

$$\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r).$$

Wystarczy sprawdzić, czy z „prawdy" wynika „prawda".
Niech zatem

$$\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \equiv 1, \text{ czyli}$$

$$p \to q \equiv 1 \text{ oraz } q \to r \equiv 1, \text{ czyli}$$

$$\neg p \vee q \equiv 1 \text{ oraz } \neg q \vee r \equiv 1, \text{ zatem}$$

$$(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r) \equiv 1, \text{ zatem}$$

$$\neg p \vee \underset{\overset{|||}{1}}{(q \vee \neg q)} \vee r \equiv 1, \text{ zatem}$$

$$\neg p \vee r \equiv 1, \text{ zatem}$$

$$p \to r \equiv 1, \text{ co należało udowodnić}$$

1

(2) $\forall_{A,B,C \subset X} \quad A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

Metoda formy zdaniowej: dla $x\in X$

$$x\in A\cap(B\cup C) \equiv x\in A \wedge x\in(B\cup C) \equiv$$

$$\equiv \underbrace{x\in A}_{p} \wedge (\underbrace{x\in B}_{q} \vee \underbrace{x\in C}_{r})$$

Stosujemy de Morgana.

(3). $\forall_{n\geq 1} \quad 2 \mid n^2-n$

Niech $T(n)$: $2 \mid n^2-n$.

Mamy pokazać, że $\forall_{n\geq 1} T(n)$. Z ZIM wystarczy pokazać, że

$$T(1) \wedge \underbrace{\left(\forall_{k\geq 1} T(k) \Rightarrow T(k+1)\right)}_{(*)}.$$

$T(1)$ jest prawdą.

Aby pokazać $(*)$ wystarczy pokazać, że dla $k\geq 1$, z prawdy $\Rightarrow$ prawda.

Niech $T(k)$, czyli $k^2-k = 2l_k$, dla pewnego $l_k\in\mathbb{Z}$.

Weźmy $(k+1)^2-(k+1) = (k+1)(k+1-1) = (k+1)k =$

$$= k^2+k = \underbrace{(k^2-k)}_{2} + 2k \overset{z.\,ind}{=} 2l_k+2k = 2(l_k+k)$$

co dowodzi, że $T(k+1)$ jest prawdą i na mocy ZIM

$\forall_{n \geq 1} \; 2 \mid n^2 - n$.

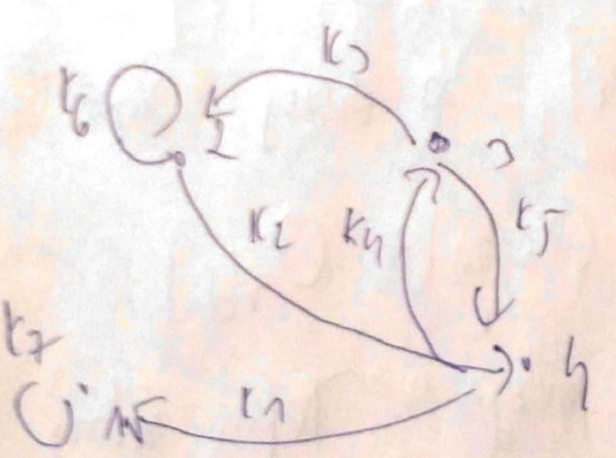
(4) Ponieważ $a \in A \Rightarrow a \neq 0$, to

$a \mid a$, co oznacza, że R jest (RZ)

Ponieważ $3 \mid 12$ ale $12 \nmid 3$ nie jest (RS)

Ponieważ zdanie $a \mid b \wedge b \mid a$ jest zawsze fałszywe, implikacja $a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b$ jest prawdziwa, więc R jest (RA).

(5)



np. $g(2,4) = k_2$ itd.

$$A_G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

a pozostałe „0".

Zadania Gr. II

① Wystarczy zauważyć, że $r \to s \equiv \neg r \vee s$ i wtedy zdania są wzajem sobie równe

② Rozwiązujemy metodą formy zdaniowej, czyli dla $x \in X$

$$x \in A \cup (B \cap C) \equiv (x \in A) \vee x \in (B \cap C) \equiv$$

$$(x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$$ i dalej de Morgan.

③ Niech $T(n):\ 9 \mid 10^n - 1$, $n \geq 1$.

Aby udowodnić $\forall_{n \geq 1} T(n)$ wystarczy (na mocy ZIM) wykazać, że

$$T(1) \wedge \underbrace{\left(\forall_{k \geq 1} T(k) \Rightarrow T(k+1) \right)}_{(*)}$$ jest prawdą.

$T(1)$ prawda.

Aby pokazać, że $(*)$ prawda, wystarczy dla $k \geq 1$ pokazać, że z „prawdy" → „prawda".

Niech $T(k)$: $10^k - 1 = 9 l_k$, $l_k \in \mathbb{Z}$

Bierzemy $T(k+1)$: $10^{k+1} - 1 = 10 \cdot 10^k - 1$

$= (9+1)10^k - 1 = 10^k - 1 + 9 \cdot 10^k$

z zał.

$= 9 l_k + 9 \cdot 10^k = 9(\underbrace{l_k + 10^k}_{l_{k+1}})$ //

(4) R jest (RZ) bo dla $a = b$

$4 | (a-b) \equiv 4 | 0$

Ponieważ $a - b = -(b-a)$, to R jest (RS).

Niech $aRb \wedge bRc$

$4 | a-b \quad 4 | b-c$

$a - b = 4k$, $b - c = 4l$

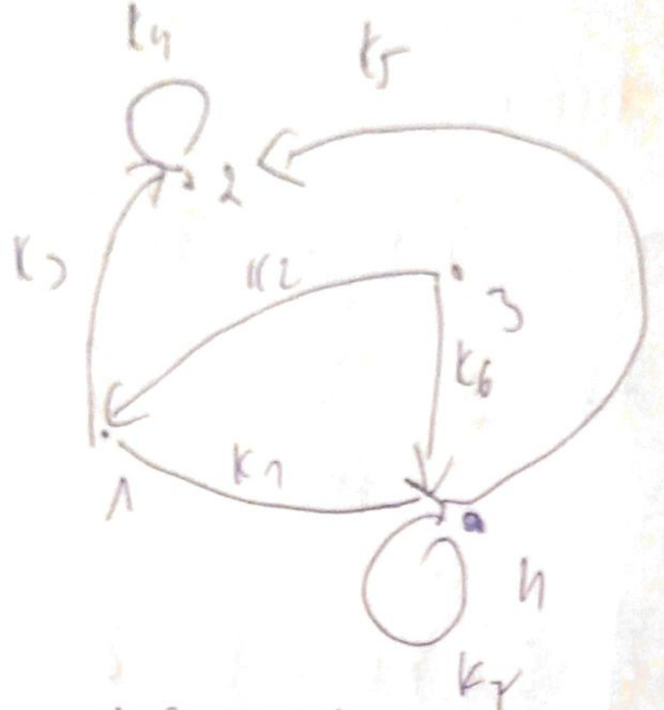
Dodając stronami $(a-b) + (b-c) = 4(k+l)$

$a - c = 4(k+l)$ co

oznacza, że R jest (RP).

(RA) Ponieważ R jest RS i $\exists\, a,b \in A\ a \neq b$,
R nie może być (RA).

⑤



np. $g(4,2) = k_5$ <u>M</u>

$$A_R = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & 1 & & 1 \\ 2 & & 1 & & \\ 3 & 1 & & & 1 \\ 4 & & 1 & & 1 \end{array}$$

a poza tym „0"

Relacja podzielności i jej własności

<u>Problemy</u> ① 3.2.17 (Zb. zad. CRR1)

② 3.2.18 – " –

③ Niech $R_p \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ określona następująco:

$$\forall_{m,n\in\mathbb{Z}} \quad mRn \iff \nu_p(m) = \nu_p(n),$$

gdzie $r_p(n)$ – reszta z dzielenia n przez

$p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ $(p \geq 2)$,

czyli $n = kp + r_p(n)$, $r_p(n) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Udowodnić, że R_p jest <u>relacją równoważności</u>, gdy jest (RZ) $\wedge$ (RS) $\wedge$ (RP).

· Niech $p = 7$. Dla $n = 5$ wyznaczyć

$$\{m : n \, R_p \, m\}$$

<u>Rozwiązania</u>

<u>3.2.17.</u> ~~R jest jaka w sprawie #Z (...)~~

Mamy zatem sprawdzić, czy R jest: (RZ), (RS), (RP), gdzie

$$R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$x R y \equiv x - y = 2$$

Zauważmy, że R nie jest (RZ), bowiem $x - x = 0 \neq 2$.

R nie jest też RS, bowiem dla $x \neq y$

$$x - y \neq -(y - x).$$

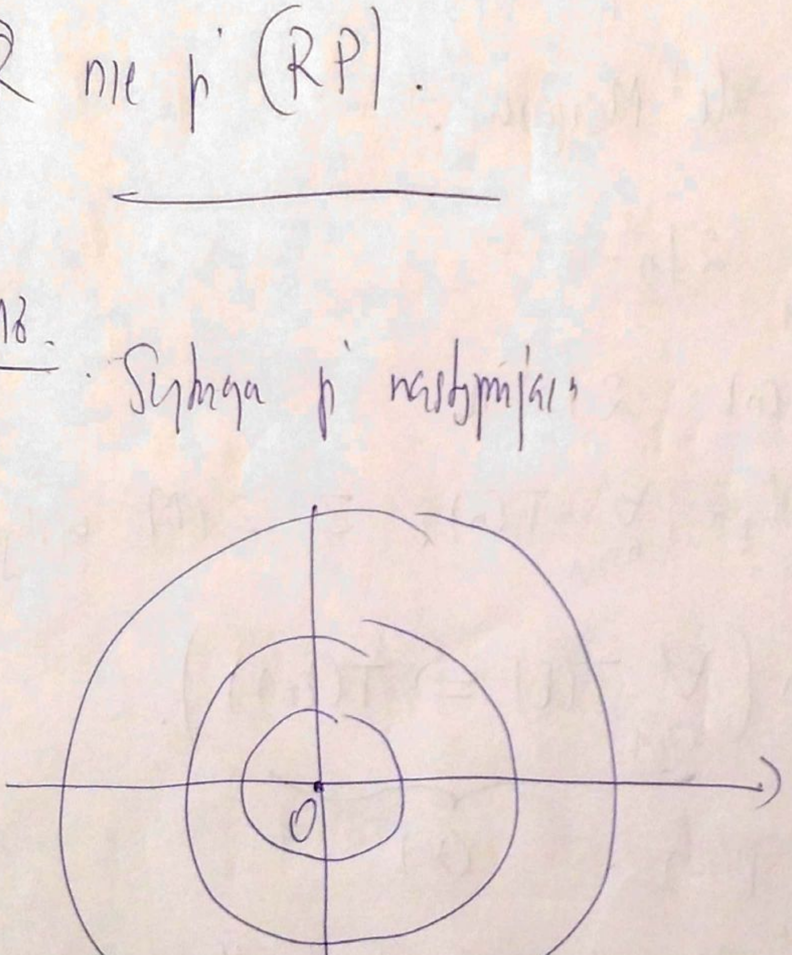
Niech $x-y=2$ i $y-z=2$

Wtedy $\underset{x}{4}-\underset{y}{2}=2$ $\quad \underset{y}{2}-\underset{z}{0}=2$

Skąd $x-z=4-0=4\neq 2$, zatem

R nie j. (RP).

2.2.18. Sytuacja j. następująca:



Oznaczmy przez O_r, $r>0$ okrąg o środku O i promieniu $r>0$. Dla $r=0$, $O_0=\{O\}$

Zauważ, że $\mathbb{R}^2 = \{ O_r,\ r \geq 0 \}$, gdzie

(i) $r_1 \neq r_2$

$O_{r_1} \cap O_{r_2} = \emptyset$ bo

$(x,y) \in O_{r_1} \iff x^2 + y^2 = r_1^2$

$(x,y) \in O_{r_2} \iff x^2 + y^2 = r_2^2$ i $r_1 \neq r_2$

(ii) $\bigcup_{r \geq 0} = \mathbb{R}^2$, bo

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, to biorę $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

mamy $(x_0, y_0) \in O_{r_0}$

Zatem jest to podział. Definiuję relację $R \subset \mathbb{R}^2$

$a R b \equiv \exists_{r_0} \ (a,b) \in O_{r_0} \iff$

$a^2 + b^2 = r_0^2$.

Udowodnić, że R jest relacją równoważności.

(3)

Należy zauważyć, że

$$m R n \iff p \mid m-n,$$

a taka relacja była już badana: ma własności $RZ \wedge RS$ i RP.

Nazywa się relacją kongruencji $\mathrm{mod}(p)$ i piszemy też

$$m \equiv n \pmod{p}$$

Niech teraz $p=7$ i weźmy zbiór

$$A_5 = \{ m \in \mathbb{Z} : 5 \equiv m \pmod{7} \}$$

Zauważmy, że (i) $A_5 \neq \emptyset$, bo $5 \equiv 5 \pmod{7}$

$(5 \in A_5)$

(ii) Mamy: $m \in A_5 \equiv 5 \equiv m \pmod{7} \equiv$

$$\equiv 7 \mid m-5 \equiv \exists_{k_m \in \mathbb{Z}} \; m-5 = k_m \cdot 7 \equiv$$

$$\exists_{k_m \in \mathbb{Z}} \; m = 5 + 7k_m$$

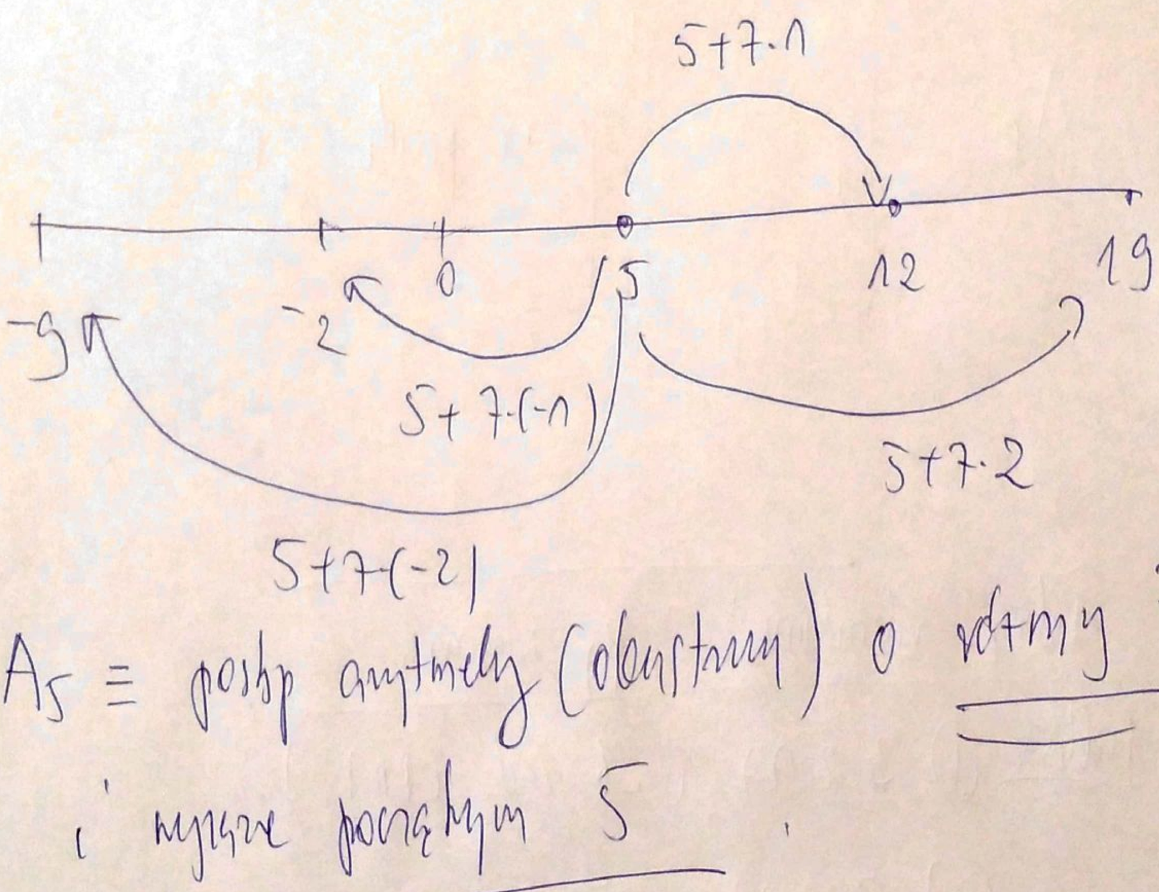
I na odwrót, biorąc

$$m = 5 + 7k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ dowolny}$$

$$m - 5 = 7k \equiv 7 \mid m - 5$$

Zatem

$$A_5 = \{ 5 + 7k, \; k \in \mathbb{Z} \}$$



$A_5 \equiv$ postęp arytmetyczny (obustronny) o różnicy 7

i wyrazie początkowym 5.