Kurs: Matematyka DYSKRETNA

Forma: Ćwiczenia

Tryb Online 21.04.2021

Temat: Metody zliczania – problemy.

Problem 1 (4.2.5)

Uzasadnić, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$

Zastosujmy wzór dwumianowy Newtona

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} \ \forall_{n\geq 1} \quad (a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Podstawiając $a=-1$, $b=1$ mamy tezę.

Problem 2 (Zadanie 4.1.6 26.2)

Do przeczytania.

Problem 3: Z urny zawierającej 49 ponumerowanych kul losujemy 6. Na ile sposobów można to zrealizować.

Niech $|X| = 49$, zbiór wszystkich kul.

Wynikiem losowania jest

$$A \subset X, \text{ gdzie } |A| = 6.$$

Bierzemy rodzinę $\mathcal{A}_6 = \{A \subset X : |A| = 6\}$.

Wiemy, że $|\mathcal{A}_6| = \binom{49}{6} = 11 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 47 \cdot 49 =$

$13.983\,816$

Przykład 4.

Z urny zawierającej n kul losujemy $1 \leq k$ pojedynczo, ze zwracaniem wylosowanej kuli. Na ile sposobów można wykonać tę czynność?

Niech X - zbiór wszystkich kul, gdzie $|X| = n$.

Teraz wynikiem losowania nie może być zbiór (DLACZEGO?).

Niech W - wynik losowania.

Wtedy $W = (W_1, W_2, \ldots, W_k)$, gdzie

$W_j \in X$,

czyli W - ciąg (dopuszczalne powtórzenia!) długości k

zbiory k elementów zb. X.

Niech $W = \{ w : w = (v_1, v_2, \ldots, v_k) \}$,

lub $W = V_n^k$

Stąd $|W| = n^k$

Przykład

Niech $X = \{a, b, c, d\}$. Wypisać wszystkie 3-elem. kombinacje z powtórzeniami elem. X.

Bezpiecznie jest ustalić ile takich kombinacji jest –

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} =$$

$$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20.$$

Niech, że takie kombinacje są klasą abstrakcji wariacji z powtórzeniami, gdy relacja wyznaczająca tę klasę jest przestawienie (permutacja).

Np. biorąc

$w = (a, b, b)$, mamy

$$[w]_R = \{(a,b,b), (b,a,b), (b,b,a)\}.$$

Proszę wypisać te wszystkie kombinacje.

Przykład 6.

Weźmy równanie

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k,$$

gdzie $x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \geq 1$.

Przez jego rozwiązanie będziemy rozumieli każdy ciąg liczb całkowitych nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$.

Wiadomo (p. np. Fakt 4.1.9 zb. zad.), że liczba rozw. jest równa $\binom{n+k-1}{k}$, a więc zbiór ten jest równoliczny ze zbiorem wszystkich k-el. kombinacji z powtórzeniami. (Proszę wypisać ZAD. 4.1.10).

Bierzemy równanie

$$(*) \qquad x + y + z = 7, \quad \text{gdzie } x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Wyznaczyć liczbę wszystkich rozw. tego równania.

Zauważ, że $x, y, z \in \mathbb{N}$ (!), a nie całkowite nieujemne!

Dlatego równanie (*) zapiszemy w postaci równoważnej

$$(*) \Leftrightarrow (x-1) + (y-1) + (z-1) = 4$$

Zamieniamy zmienne:

$$\alpha \stackrel{df}{=} x-1, \quad \beta \stackrel{df}{=} y-1, \quad \gamma \stackrel{df}{=} z-1$$

Wtedy

$$(*) \Leftrightarrow \underbrace{\alpha + \beta + \gamma = 4}_{(**)}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Zatem zbiory rozwiązań (*) i (**) są równoliczne.

Proszę dokończyć!

Problem 7 (Zad. 4.1.25)

Na ile sposobów można podzielić grupę złożoną z 13 osób na: 3 podgrupy 2osobowe, jedną podgrupę 3 os. i jedną podgrupę 4 osobową.

Niech G - zbiór osób, gdzie $|G| = 13$.

Oznaczmy:

(i) G_1^2, G_2^2, G_2^3 - podgrupy G, 2-osobowe

$$|G_1^2| = |G_2^2| = |G_2^3| = 2$$

(ii) G_1^3 - podgrupa 3-osobowa

$$|G_1^3| = 3$$

(iii) G_1^4 - podgrupa 4-osobowa.

Mamy zatem podział $\{G_1^2, G_2^2, G_2^3, G_1^3, G_1^4\}$.

Problem sprowadza się do ustalenia na ile sposobów można taki podział ustanowić.

Ustalmy na chwilę kolejność brania podgrup jak niżej:

$$(*)\quad \underbrace{G_1^2,\ G_2^2,\ G_2^3}\!,\ G_1^3,\ G_1^4$$

Wtedy mamy składniki z ZWW

$$U:\ \underbrace{\ \ \ }_{S_1}\ \underbrace{\ \ \ }_{S_2}\ \underbrace{\ \ \ }_{S_3}\ \underbrace{\ \ \ }_{S_4}\ \underbrace{\ \ \ \ }_{S_5}\ |$$

gdzie $|S_1| = \binom{13}{2}$, $|S_2| = \binom{13-2}{2} = \binom{11}{2}$,

$|S_3| = \binom{11-2}{2} = \binom{9}{2}$

$|S_4| = \binom{9-2}{3} = \binom{7}{3}$, $|S_5| = \binom{7-3}{4} = \binom{4}{4}$

Stąd $|U| = \binom{13}{2}\binom{11}{2}\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4}$.

Ale podział nie zależy od ustalenia typu $(*)$

Zatem, w (*) mamy zapisać strukturalnie.

grupa 1, grupa 2, grupa 3,

gdzie grupa 1 $= \{ G_1^2, G_2^2, G_2^3 \}$

grupa 2 $= \{ G_1^3 \}$

grupa 3 $= \{ G_1^4 \}$

W takim razie mamy 3-elementy zbiór struktur grup i tak należy rozumieć przejście w (*).
Dlatego rozwiązanie problemu ma postać

$$\frac{1}{3!}\binom{13}{2}\binom{11}{2}\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4} =$$

$$= \frac{1}{3!}\cdot\frac{13!}{2!\cdot\cancel{11!}}\cdot\frac{\cancel{11!}}{2!\cdot\cancel{9!}}\cdot\frac{\cancel{9!}}{2!\cdot\cancel{7!}}\cdot\frac{\cancel{7!}}{3!\cdot\cancel{4!}}\cdot\frac{\cancel{4!}}{4!\cdot 0!} =$$

$$= \frac{13!}{(2!)^3\cdot(3!)^1\cdot(4!)^1}\cdot\frac{1}{3!}$$

Uwaga.

Uogólnienie [cf. Fakt 4.1.1 LRN]/

Niech $\mathcal{A}$ - rodzina podziałów zbioru X, $|X|=n$, gdzie każdy podział ma strukturę:

$$P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_r ,$$

gdzie (i) $P_i = \{A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{n_i}^i\}$

$1 \le i \le r$

(ii) $|A_j^i| = k_i$,

(iii) $\sum_{i=1}^{r} n_i k_i = n$

Wtedy $|\mathcal{A}| = \dfrac{n!}{(k_1!)^{n_1}(k_2!)^{n_2}\cdots(k_r!)^{n_r}} \cdot \dfrac{1}{r!}$

U nas $n=13$, $r=3$,

$k_1=2$, $n_1=3$

$k_2=3$, $n_2=1$, $k_3=4$, $n_3=1$.

Problem 8. (4.2.22).

Uzasadnić, że $S(n,3) > 3^{n-2}$, $n \geq 6$.

Metodą indukcji matem.

Przy uzasadnić, że $S(6,3) > 3^4$,

a następnie korzystając z tw. o liczbach Stirlinga II-rodzaju pokazać, że

$$S(n,3) > 3^{n-2} \Longrightarrow S(n+1,3) > 3^{n-1}$$