Kurs: Matematyka Dyskretna

Forma zajęć: Ćwiczenia

Tryb: On-line, Ćw. #3

Temat: Algebra zbiorów.

Problemy

1°. Definicja: $A, B \subset X$

$$A \triangledown B \stackrel{df}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Fakt 2.1.2 podaje własności działania „$\triangledown$". Udowodnić je.

2°. Analiza przykładu 2.1.3 (str. 18)

3°. Zad. 2.2.4

4°. Zad 2.2.6

5°. Zad 2.2.8

6°. Zad. 2.2.14

7°. Zad 2.2.17.

8°. Zad 2.2.19

9°. Przykład: Zad 2.1.9. (str. 21)

Rozwiązania i uzasadnienia

1°. Udowodnimy, że $A \nabla B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

zastosujemy rachunek zbiorów:

$$(A\cup B)\setminus(A\cap B) \overset{?}{=} (A\cup B)\cap(A\cap B)^C \overset{?}{=}$$

$$(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C) \overset{?}{=} \left[(A\cup B)\cap A^C\right]\cup\left[(A\cup B)\cap B^C\right]$$

$$= \left[(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)\right]\cup\left[(A\cap B^C)\cup(B\cap B^C)\right]$$

$$= \left[\emptyset\cup(B\setminus A)\right]\cup\left[(A\setminus B)\cup\emptyset\right] = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

Ilustracja geom. (tzw. diagramy Venn'a)

2°. $A\cap B=\emptyset \Rightarrow A\nabla B = A\cup B$; $A\nabla B = B\nabla A$

SAMODZIELNIE !

$A\nabla B=\emptyset \Rightarrow A=B$:

Z tezy 1°. $A\nabla B = E\setminus F$, $E=A\cup B$, $F=A\cap B$.

Skoro $E\setminus F=\emptyset$, to $E\subset F$. Ale $F\subset E$, zatem

$E=F$. Dlatego $A\cup B = A\cap B$.

Ale $A\cap B\subset A\subset A\cup B$, $A\cap B\subset B\subset A\cup B$, więc

z $A=B$.

Rozdzielność $A \cap (B \nabla C) = (A \cap B) \nabla (A \cap C)$

Samodzielnie!

3°. Zad 2.2.4. (błąd w treści zadania!)

Niech $A, B, C \subset X$.

Mamy pokazać, że $\underbrace{(A \setminus B) \cup C}_{L} = \underbrace{[(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)}_{P}$

Weźmy zbiór P i pokażmy, że $= L$

$$P \stackrel{?}{=} [(A \cup C) \cap B^c] \cup (B \cap C) \stackrel{?}{=} [(A \cap B^c) \cup (C \cap B^c)] \cup (B \cap C)$$

$$\stackrel{?}{=} (A \cap B^c) \cup [(C \cap B^c) \cup (C \cap B)] =$$

$$\stackrel{?}{=} (A \cap B^c) \cup [C \cap (B^c \cup B)] = (A \cap B^c) \cup (C \cap X)$$

$$\stackrel{?}{=} (A \cap B^c) \cup C = (A \setminus B) \cup C$$

4°. Pokażmy, że $\forall A, B, C \subset X$

$$(A \subset B) \Rightarrow [(C \setminus B) \subset (C \setminus A)]$$

Wystarczy pokazać, że „$1 \rightarrow 1$". Załóżmy zatem, że

$A \subset B$.

Na tej podstawie należy wykazać, że $C \setminus B \subset C \setminus A$, Czyli $\forall_{x \in X} \left[x \in (C \setminus B) \right] \Rightarrow \left[x \in (C \setminus A) \right]$.

Aby to udowodnić, istotnie, dla $x \in X$

$x \in (C \setminus B)$ jest prawdą.

Ale to oznacza, że $x \in C \land x \notin B$, czyli

$x \in C \land x \in B^c$.

Ale $A \subset B$ oznacza, że $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$.

Dlatego $x \in C \land x \in A^c \equiv x \in (C \cap A^c)$

$\equiv x \in (C \setminus A)$, co należało udowodnić!

(5) Wiadomo, że dla $A, B \subset X$

$A \subset (A \cap B) \setminus B$

Ponieważ $(A \cap B) \setminus B = (A \cap B) \cap B^c =$

$= A \cap (B \cap B^c) = A \cap \emptyset = \emptyset$, zatem

$A \subset \emptyset$, czyli $A = \emptyset$.

Zilustruj ten problem diagramem Venn'a!

6°

Mamy udowodnić, że

$$\forall_{n \geq 1} T(n), \text{ gdzie}$$

$$T(n): \underbrace{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2}_{L_{T(n)}} = \underbrace{\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}}_{P_{T(n)}}.$$

Stosujemy ZIM, czyli

$$\underbrace{\left[T(1) \wedge \left(\forall_{k \geq 1} T(k) \Rightarrow T(k+1) \right) \right]} \Rightarrow \forall_{n \geq 1} T(n)$$

Wystarczy pokazać, że zdanie jest prawdziwe.

$$T(1): L_{T(1)} = 1^2 = 1 \qquad \text{PRAWDA.}$$

$$P_{T(1)} = \frac{1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Pokażmy, że $\forall_{k \geq 1} \left(T(k) \Rightarrow T(k+1) \right) \equiv 1$.

Weźmy $k \geq 1$ i załóżmy, że $T(k)$ jest prawdą.

Zatem, z def $T(n)$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Na tej podstawie wykażemy, że $T(k+1)\equiv 1$,

czyli

$$\underbrace{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2+(2k+1)^2}_{L_{T(k+1)}}=\underbrace{\frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}}_{P_{T(k+1)}}.$$

Ale

$$L_{T(k+1)}=L_{T(k)}+(2k+1)^2\overset{\text{z zał.}}{=}$$

$$P_{T(k)}+(2k+1)^2$$

Proszę dokończyć!

7°. Najpierw zdefiniuję $T(n)$

Treść zadania oznacza, że

$$T(n): \underset{k_n \in \mathbb{N}}{\exists} \quad 4^n + 15n - 1 = 9k_n$$

Wyznaczę najmniejsze n, dla którego $T(n) \equiv 1$

(metoda prób - błędów)

$n = 1 \qquad 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 = 9 \cdot 2 \quad k_1 = 2$

Zatem $n_0 = 1$, i mamy udowodnić, że

$$\underset{n \geq 1}{\forall} T(n).$$

Proszę zastosować <u>styl</u> rozwiązania zad. 6.

8°. Z treści zadania

$T(n): \ 3^{n+2} > 4n+7$ dla $n \geq 3$ $(n_0 = 3)$

Wykażmy, że $\forall_{n \geq 3} T(n)$

$T(3)$ $\quad 3^{3+2} = 3^5$ $\Rightarrow 3^5 > 19$ PRAWDA

$4 \cdot 3 + 7 = 19$

Wystarczy wykazać, że

$\forall_{k \geq 3} T(k) \Rightarrow T(k+1)$, czyli, że

jeśli $T(k) \equiv 1$, to $T(k+1) \equiv 1$.

Niech zatem $T(k) \equiv 1$, czyli

$3^{k+2} > 4k+7$.

Udowodnimy

$T(k+1): \ 3^{(k+1)+2} > 4(k+1)+7$.

Mamy kolejno:

$$3^{(k+1)+2} = 3^{(k+2)+1} = 3 \cdot 3^{k+2}$$

Ale $3^{k+2} > 4k+7$ z założenia, więc

$$3^{(k+1)+2} > 3(4k+7) .$$

Wystarczy pokazać, że ~~3(4k+~~

$$3(4k+7) > 4(k+1)+7 \iff$$

$$12k+21 > 4k+11 \iff$$

$8k > -10$. Ale $k \geq 3$, więc

to jest prawda. Stąd na mocy ZIM

$$\underset{n \geq 3}{\forall} T(n)$$