Kurs: Matematyka DYSKRETNA

Forma: Wykład

Tryb: Online

W. 11.

Temat. Metody zliczania c.d.

W ramach Problemu #2 rozważaliśmy sytuację następującą:

$$f \in W_n^k \iff f: \{1, 2, \dots, k\} \xrightarrow{1-1} X,$$

gdzie $|X| = n$, $1 \le k \le n$.

W szczególności dla $k = n$, otrzymaliśmy zbiór wszystkich permutacji zbioru X – P_n, oraz

$$|W_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Uogólnijmy tę sytuację do następującej:

$$f \in V_n^k \iff f: \{1, 2, \dots, k\} \longrightarrow X,$$

$1 \le k$, $|X| = n$.

Uwaga. Dla $k > n$, $f \in V_n^k$ nie może być typu „1-1"

Dalej $f \in V_n^k$ będziemy nazywać

<u>k-el. wariacje z powtórzeniami zbioru n-el.</u>

Wprost z def. wynika, że

$$W_n^k \subset V_n^k \quad \text{dla} \quad 1 \le k \le n.$$

<u>Problem 5</u>

$$|V_n^k| = ?$$

Rozwiązanie Problemu 5 – skorzystamy z ZWN:

$$\underset{s_1}{\sqcup}\ \underset{s_2}{\sqcup}\ \sqcup \ \dots \ \underset{s_k}{\sqcup}$$

$$\underbrace{|s_1| = n \quad |s_2| = n \quad \dots \quad |s_k| = n}_{\text{bo dopuszczamy powtórzenia}}$$

Stąd $\quad |V_n^k| = n^k \quad$ #1

<u>Uwaga:</u> Niech Bin_n – oznacza zbiór wszystkich ciągów binarnych długości $n \geq 2$.

Zatem $f \in Bin_n \iff f: \{1,2,\ldots,n\} \to \{0,1\}$,

czyli

$$Bin_n = V_2^n \quad \text{i dlatego}$$

$$|Bin_n| = 2^n \qquad (\#2).$$

Wcześniej ustaliliśmy, że dla $|X| = n$,

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|} = 2^n.$$

Dlatego pomiędzy zbiorami Bin_n oraz $\mathcal{P}(X)$ można ustalić bijekcję (1-1 & na), czyli istnieje odwzorowanie

$$h: Bin_n \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathcal{P}(X),$$

które pozwala zakodować ciągiem binarnym każdy element (zbiór) rodziny $\mathcal{P}(X)$.

ZAD 1

P.4.4.5 ([RR]).

Niech teraz dalej $|X|=n$ i weźmy zbiór V_n^k, $k\geq 1$. Na V_n^k definiujemy relację R:

$$\forall_{w_1, w_2 \in V_n^k} \quad w_1 R w_2 \equiv \exists \text{ permutacja } k\text{-el. } f,$$

$$\text{że } f(w_1) = w_2 .$$

Zanim zbadamy R weźmy przykład.

<u>P1.</u>

$$X = \{a, b, c, d\}, \quad k = 5$$
$$(n=4)$$

$$w_1 = (a, b, a, d, c)$$

$$w_2 = (c, d, a, b, a)$$

Zauważmy, że w_2 jest wynikiem „przestawienia" wyrazów w_1, czyli efektem „spermutowania" w_1, zatem $w_1 R w_2$

Zad 2.

Uzasadnić, że R jest relacją równoważności.

Ponieważ R jest relacją równoważności, mamy rozbicie V_n^k na klasy abstrakcji.

Wtedy dla $w \in V_n^k$, $[w]_R$ będziemy nazywać k-el. kombinacją z powtórzeniami zbioru n-el.

Uwaga.

Mamy zatem dwa rodzaje kombinacji:

z Przykł 3: • $\mathcal{X}_k$ (oznaczane też C_n^k)
(bez powtórzeń)
• z powtórzeniami.

P. 2. (4.4.6 [RR])

$X = \{1, 2, 3, 4\}$. Weźmy $k = 3$.

Bierzemy 3-el. wariacji z powtórzeniami, np.

$w = (1,2,1)$. Wtedy

$$[w] = [(1,2,1)] = \{(1,2,1), (1,1,2), (2,1,1)\}$$

P. 3 (4.4.7 [RR])

$X = \{a, b, c\}$

Wypiszmy wszystkie 2-el. komb. z powtórzeniami X:

$[(a,a)]$, $[(a,b)]$, $[(a,c)]$, $[(b,c)]$, $[(b,b)]$, $[(c,c)]$.

Mamy ich 6. Zauważmy, że

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{12}{2} = 6.$$

Pokażemy dalej, że to nie jest przypadek!

FAKT (p. Tw. 4.4.2 [RR]).

Liczba wszystkich k-el. komb. z powtórzeniami zbioru n-el. wynosi

$$\binom{n+k-1}{k} \quad (\#)$$

Zad 3.

Poczytać dowód (str. 134-135 [RR]).

Zad 4.

Punkt 4.4.8 ([RR]).

Problem 6.

Niech dany będzie zbiór $|X| = n$. Na ile sposobów można wybrać k-el. podzbiór tego zbioru?

Zacznijmy od najprostszego przykładu.

Pk (4.4.9 [RR]):

Obliczyć na ile sposobów talię kart złożoną z 52 kart można rozdzielić pomiędzy 4 graczy po 13 kart dla każdego.

Przede wszystkim zauważ, że gracze nie pojawiają się w tym zadaniu w żadnej kolejności.

W omawianym przypadku mamy:

- zbiór $|X| = 52$
- bierzemy <u>wszystkie</u> partycje P tego

zbioru, gdzie

$$P = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

oraz $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 13$.

Pytamy się: <u>ile jest wszystkich takich partycji</u>?

Problem rozwiążmy za pomocą ZWW:

a) na chwilę uporządkujmy sobie graczy, np.

$g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4$

$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4$

po to aby ~~[illegible]~~ rozdać karty (13) w kolejności j.w.

Wtedy: $|S_1| = \binom{52}{13}$, $|S_2| = \binom{52-13}{13} = \binom{39}{13}$,

$|S_3| = \binom{39-13}{13} = \binom{26}{13}$, $|S_4| = \binom{26-13}{13} = \binom{13}{13}$.

Niech X oznacza rozw. $P4$.

Mamy wtedy:

$\underline{\qquad}$ $\underline{\qquad\qquad}$ $\equiv$ wybranie j.w.

rozdanie zgodnie z treścią $P4$	ustawienie graczy w.g. określonej kolejności	$\tilde{S}$.
$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	$\lvert\tilde{S}\rvert = \lvert S_1\rvert\lvert S_2\rvert\lvert S_3\rvert\lvert S_4\rvert$

Ale $|\tilde{S}_1| = X$, $|\tilde{S}_2| = |P_4| = 4!$.

Dlatego

$$4!\, X = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13},$$

czyli

$$X = \frac{1}{4!}\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}.$$

Na końcu zatem, ich podziałów

$$X = \frac{52!}{(13!)^4 \cdot 4!}.$$

W ogólności, mamy

<u>Fakt 2</u>. (Tw. 4.4.3 [RR]).

Każdy n-el. zbiór można podzielić na k parami rozłącznych podzbiorów o m-elem. ($km = n$) na

$$\frac{n!}{(m!)^k \cdot k!}$$ sposobów.

<u>Zad. 5</u>

Niech $|X| = n$ i n - parzyste. Na ile sposobów można podzielić ten zbiór 2-el. partycjami o jednakowej liczbie elementów ich słowach?

Oczywiste rozwiązanie naszej sytuacji nie rozwiązuje Problemu 6.

Rozwiązanie tego problemu prowadzi do koncepcji Liczb STIRLINGA II-go rodzaju, które oznaczamy $S(n,k)$.

Jasne jest, że $S(n,n) = 1$, $S(n,1) = 1$.

Dlatego niech $1 < k < n$.

Fakt (o liczbie $S(n,k)$, tw. 4.4.5 [RR])

$$\forall_{1 < k < n} \quad S(n,k) = S(n-1, k-1) + k\,S(n-1, k)$$

P5 (4.4.12 [RR])

Weźmy $S(5,3)$ = # wszystkich partycji zbioru 5-el. na 3 części.

Z faktu o $S(n,k)$ mamy:

$$S(5,3) = S(4,2) + 3S(4,3) =$$

$$S(3,1) + 2S(3,2) + 3\left(S(3,2) + 3S(3,3)\right]$$

$$= 1 + 2\left(S(2,1) + 2S(2,2)\right) +$$

$$3\left(S(2,1) + 2S(2,2)\right) + 9 = \underline{\underline{25}}$$

Zad. 6

Oblicz $S(n,2)$, $n>2$

(p. str. 138 [RR]).

III zasada zliczania – Zasada szufladkowa DIRICHLETA (ZSD).

Jasne jest, że jeśli

k przedmiotów umieścimy w n pudełkach, gdzie $k > n$, to co najmniej do jednego pudełka trafią co najmniej dwa przedmioty.

Jest to ZSD.

Potrzebujemy sformułowania matematycznego ZSD.

Fakt (ZSD, Tw. 5.5.6 [RR])

Niech $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ będzie podziałem zbioru skończonego X.

Wtedy $\underset{1 \le i_0 \le k}{\exists} |A_{i_0}| \geq \frac{|X|}{k}$.

Dowód. Z założenia

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$$

oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Dlatego z (ZA)

$$|X| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|.$$

Stąd mamy oszacowanie

$$|X| \leq k \cdot \max\{|A_j|, 1 \leq j \leq k\}$$
$$= k \cdot |A_{i_0}| \text{ dla pewnego } i_0.$$

Dlatego $|A_{i_0}| \geq \frac{|X|}{k}$.

Zad 7.

Wyjaśnić związek tego faktu z ZSD.