Kurs: Matematyka DYSKRETNA

Forma: Wykład

Tryb: On-line

W.12.

Temat. Metody zliczania c.d. ~~[illegible]~~
Zjawisko REKURENCJI

Przypomnijmy, że zajmowaliśmy się ZSD przedstawioną następująco:

Niech $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ - podział zb. skończ. X.

Wtedy $\exists_{1 \le i_0 \le k} \; |A_{i_0}| \geq \frac{|X|}{k}$.

W zastosowaniach ZSD przedstawiana jest najczęściej:

Fakt 1 (p. Tw. 4.4.7 [RR]).

Niech $f: A \to B$, gdzie $A, B \subset X$ skończone zbiory i $|A| > r|B|$, $r \geq 1$.

Wtedy $\exists_{b_0 \in B} \; |f^{-1}(\{b_0\})| > r$.

Dowód. Bierzemy podział zbioru A określony na zbiory

$$\{ f^{-1}(\{b\}),\ b \in B \},\ \text{gdzie}$$

$$f^{-1}(\{b\}) = \{ a \in A : f(a) = b \}.$$

Z własności podanej na wstępie

$$\exists\, b_0 \in B$$

$$|f^{-1}(\{b_0\})| \geq \frac{|A|}{|B|} > \frac{r\,|B|}{|B|} = r.$$

Uwaga. W przypadku, gdy $r = 1$, co najmniej jeden atom ($f^{-1}(\{b_0\})$) podziału A zawiera dwa elementy.

P1 (P.4.4.15 [RA])

Niech A będzie 10-el. podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 50\}$. Uzasadnić, że istnieją dwa 4-elem. podzbiory $A_1, A_2 \subset A$, takie że arytmetyczne sumy ich elementów są sobie równe.

Niech $\mathcal{P}$ – rodzina złożona ze wszystkich 4-el. podzbiorów zb. A.

Wiemy, że $|\mathcal{P}| = \binom{10}{4} = 210$.

Definiujemy funkcję

$$f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{N}, \text{ gdzie}$$

$$f(P) \overset{df}{=} \text{suma wszystkich elementów zb. } P \in \mathcal{P}.$$

Zauważmy, że $\forall P \in \mathcal{P}$

$$10 = 1+2+3+4 \le f(P) \le 47+48+49+50 = 194$$

Oraz zbiór $[10, 194] \cap \mathbb{N}$ liczy 185 elementów.

Mamy zatem (z Faktu n)

$$A = \mathcal{P}, \quad B = f(\mathcal{P})$$

$$210 = |A| > 1 \cdot |B| = 194.$$

Zatem istnieje liczba $k_0 \in [10, 194]$, że $f^{-1}(\{k_0\})$ jest zbiorem co najmniej 2-elementowym zbiorem z P_1, P_2 i P, a

$$f(P_1) = f(P_2) = k_0 .$$

ZASADA IV (włączania - wyłączania).

Zacznijmy od sytuacji najprostszej. Niech $A, B \subset X$, X - zb. skończony.

Zachodzą dwa przypadki:

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{albo} \quad A \cap B \neq \emptyset .$$

W pierwszym, z (ZA) mamy

$$|A \cup B| = |A| + |B| .$$

W drugim: bierzemy podział $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

Ale $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$.

Zauważmy, że jeśli $C \subset D$ (skończone), to $D = C \cup (D \setminus C)$ i z (ZA)

$$|B| = |C \cup (B \setminus C)| = |C| + |B \setminus C|,$$

czyli $$|B \setminus C| = |B| - |C|.$$

Stąd

$$|A \cup B| = |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B|$$

$$= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|.$$

Ostatecznie

(*) $$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Jest to najprostsza wersja zasady W-W.

Zad 1.

Uogólnić (*) na przypadek 3 A, B, C.

Wsk. $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$.

pokazując, że

$$|A\cup B\cup C| = \underbrace{\left(|A|+|B|+|C|\right)}_{\binom{3}{1}=3} - \underbrace{\left(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\right)}_{\binom{3}{2}=3}$$

$$+\ \underbrace{|A\cap B\cap C|}_{\binom{3}{3}=1}$$

efekt „włączenia"
wybór nieparzysty

efekt „wyłączenia"
wybór parzysty.

I ogólnie

(ZWW) (Tw. 4.4.8 [RR])

Niech $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Wtedy:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} |A_j| +$$ Nieparzyste: 1, $\binom{n}{1}=n$ (+)

$$-\left(\sum_{1\le i<j} |A_i \cap A_j|\right) +$$ Parzyste: 2, $\binom{n}{2}$ (−)

$$+\sum_{i<j<k} |A_i\cap A_j\cap A_k| +$$ Nieparzyste: 3, $\binom{n}{3}$

$$\vdots$$

$$(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$ Ostatni

Zad 2.

Napisać (ZWW) dla $n=5$.

Zad 3. (P. 4.4.16 [RR])

Zad 4. (P. 4.4.17 [RR]).

Zad 5 (dla ambitnych)

P. 4.4.18 [RR]. & Tw. Halla (4.4.9. [RR]).

Ciągi rekurencyjne.

Zad 6 (Problem wież Hanoi - P. 4.5.2 [RR]).

Def (Rekurencja I rzędu)

Niech $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n \in \mathbb{R}$. Powiemy, że $(a_n)_{n\geq 1}$ dany jest przez rekurencję I rzędu, jeśli

$a_1 = a \in \mathbb{R}$,

$\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \geq 1$

FAKT 1

Każdy rekurencyjny $\exists$ wzór można rozwiązać, tj. obliczyć a_n, $n \geq 2$.

Dowód.

Istotnie, $a_2 = f(a_1) = f(a)$

$a_3 = f(a_2) = f(f(a_1)) = f \circ f(a)$

Stosując ZIM można pokazać, że

$$a_n = f^{(n-1)}(a) \quad .$$

P1. $(a_n)_{n \geq 1}$ c. arytmetyczny, a ma

$\exists_{r} \forall_{n \geq 1} \quad a_{n+1} - a_n = r \quad$ i $\quad a_1 = a$ dane.

Zauważ, że dla $f(x) = x + r$,

$a_{n+1} = f(a_n)$

Znaleźć $f^{(k)}$.

P.2. $(a_n)_{n\geq 1}$ - c. geometryczny

$\exists_{q} \forall_{n\geq 1} \; a_{n+1} = a_n q, \quad a_1 = a$ - dane.

Wtedy $f(x) = qx$.

Znaleźć $f^{(k)}$.

Dalej zajmiemy się c. rekurencyjnymi $\underline{\text{II}}$-rzędu.

P.3. (P.4.5.4 [RR] - c. Fibonacciego).

Def (rekurencji $\underline{\text{II}}$ rzędu).

Powiemy, że $(a_n)_{n\geq 0}$ jest c. rekurencyjnym $\underline{\text{II}}$-rzędu, jeśli istnieje funkcja $f: A\times B \to \mathbb{R}$, $A, B \subset \mathbb{R}$

$\forall_{n\geq 2} \; a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2})$ i a_0, a_1, a_2 - dane.

Jeśli dodatkowo

$$f(x,y) = Ax + By, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad b$$

powiemy, że relacja II-rzędu jest LINIOWA

o stałych współczynnikach.

Mamy wtedy dla takiego ciągu $(a_n)_{n \geq 0}$

$$(*) \quad \begin{aligned} &a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (B \neq 0) \\ &a_0, a_1, a_2 \text{ - dane.} \end{aligned}$$

Rozwiązywanie rekurencji liniowej II-rzędu o st. wsp.

Niech dana będzie rekurencja $(*)$

Krok 1. Konstruujemy jej RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE:

$$x^2 - Ax - B = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Krok 2. Istnieją ciągi mające własność $(*)$ wtedy, gdy

$$\Delta = A^2 + 4B \geq 0$$

Zachodzą dwa przypadki:

(i) $(\Delta > 0)$: istnieją dwa różne rozw.

x_1, x_2 (RCH)

Wtedy mamy zawsze $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, i

$$a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n, \quad n \geq 1$$

(ii) $(\Delta = 0)$: mamy wtedy pierw. podwójny

x_0 (RCH)

Wtedy $\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$a_n = (C_1 + nC_2)x_0^n, \quad n \geq 1,$$

gdzie konkretne stałe C_1, C_2 policzymy na przykładach.

P.h. Niech $(f_n)_{n \geq 0}$, gdzie: $f_0 = 0$, $f_1 = f_2 = 1$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Mamy liczby

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Jest to słynny ciąg Fibonacciego.

Rozwiążmy tę rekurencję:

$$(RCH): \quad x^2 = x + 1 \iff$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dlatego

$$f_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n, \quad n \geq 1.$$

Wyznaczmy C_1, C_2.

Podstawmy $n = 1, 2$ kolejno:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 x_1 + C_2 x_2 = 1 \\ C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 = 1 \end{array}\right\}$$

czyli

$$\begin{cases} C_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \quad \Big/ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2(-1) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Odejmy stronami: (od „2" - „1")

$$C_2\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1\right) = 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$C_2\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5+4}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$C_2\,\frac{5+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\underline{C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}}\ ,\quad C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Stąd

$$f_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ n \geq 1$$

<u>Uwagi</u>: 1°. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$

2°. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ – złota proporcja

3°. $\frac{f_{n+1}}{f_n} \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

[RR] str. 154-158