Kurs : Matematyka DYSKRETNA
Forma : Wykład
Tryb : Online W13

Temat. Elementy teorii grafów i drzew – wprowadzenie.

O grafach mówiliśmy przy okazji prezentacji pojęcia relacji. Były to tzw. grafy skierowane.
Teraz zajmiemy się grafami nieskierowanymi, które krótko nazwiemy grafem.

Def 1
Przez graf G rozumiemy strukturę postaci
$$G = (W(G), K(G), \gamma_G), \text{ gdzie:}$$
(i) $W(G)$ jest zbiorem tzw. wierzchołków G
(ii) $K(G)$ jest zbiorem tzw. krawędzi G
(iii) γ_G jest tzw. funkcją wyboru, czyli
$$\gamma: K(G) \longrightarrow W(G) \times W(G),$$
$$K(G) \ni k \longrightarrow \gamma_G(k) = \{a, b\}, \ a, b \in W(G)$$

Uwaga 1

a) Jeśli $a=b$, to $\{a,b\}=\{a\}$

b) Dla $\delta_G(k)=\{a,b\}$, mówimy, iż wierzchołki $a,b\in W(G)$ są końcami (a nie początkiem i końcem!) krawędzi K.

c) Przypadek $a=b$, $\delta_G(k)=\{a\}$ będziemy nazywali „pętlą".

d) W zastosowaniach zbiory $W(G)$, $K(G)$ są skończone.

P1 (5.1.1)

Niech $G=(W(G), K(G), \delta_G)$, gdzie

$K(G)=\{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\}$

$W(G)=\{a,b,c,d\}$

$\delta_G(k_1)=\{a,b\}$, $\delta_G(k_2)=\{b,c\}$,

$\delta_G(k_3)=\{a,d\}$, $\delta_G(k_4)=\{d,c\}$,

$\delta(k_5)=\{d\}$.

Interpretacja geometryczna grafu G

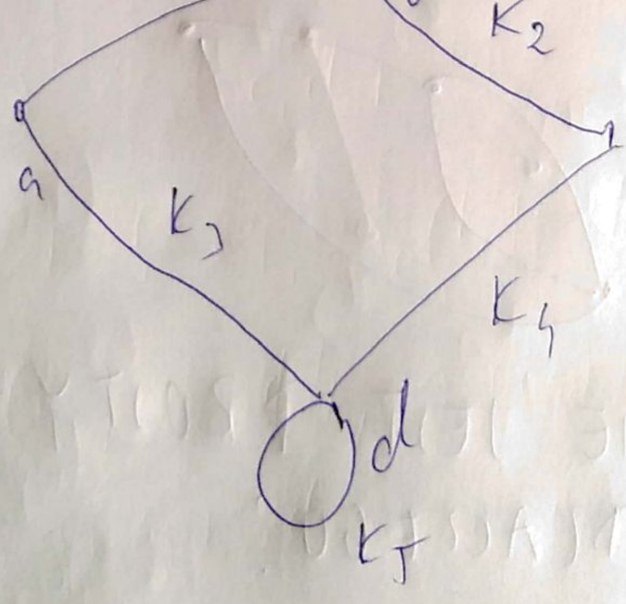
ZAŁOŻENIE.

- Rysujemy go na płaszczyźnie (a nie np. na sferze czy w $\mathbb{R}^3$ (3D))
- Wierzchołki interp. jako punkty
- krawędzie jako krzywe łączące punkty, i u

$$\gamma_G(k) = \{a, b\}$$

- staramy się unikać tak, aby krawędzie nie przecinały się

P.2
Weźmy graf z P1. (p. rys. 5.1 [RR])



Uwaga 2.

Graf to nie jego rysunek, który jest tylko jedną z wielu jego reprezentacji.

Aby dobrze to zrozumieć na pojęcie grafu musimy spojrzeć szerzej.

Def 2 (izomorfizmu grafu)

Niech dane będą dwa grafy

$$G_1 = (W(G_1), K(G_1), \gamma_{G_1})$$

$$G_2 = (W(G_2), K(G_2), \gamma_{G_2})$$

Powiemy, że G_1 i G_2 są IZOMORFICZNE, jeśli istnieje bijekcja (1-1 i NA)

$$i : W(G_1) \longrightarrow W(G_2),$$ że

$$\forall_{k_1 \in K(G_1)} \; \gamma_1(k_1) = \{a, b\} \iff \exists_{k_2 \in K(G_2)} \; \gamma_2(k_2) = \{i(a), i(b)\},$$

co zapisujemy $G_1 \cong G_2$.

Jeśli zatem dla grafów G_1, G_2 możemy ustalić wzajemną odpowiedniość pomiędzy zbiorami ich wierzchołków (istnieje bijekcja i), która zachowuje związki pomiędzy ich krawędziami, to $G_1 \cong G_2$.

FAKT 1

„$\cong$" jest relacją równoważności na zbiorze $\mathcal{G}$ - wszystkich grafów.

Wtedy dla każdej abstrakcji $[G]_{\cong}$, $G \in \mathcal{G}$, wszystkie $\tilde{G} \in [G]_{\cong}$ są nierozróżnialne.

Mówimy wtedy, że G reprezentuje $[G]_{\cong}$

ZAD 1. Udowodnić Fakt 1.

Fakt 2. (O grafach izomorficznych)

Jeśli $G_1 \cong G_2$, to

1°. $|W(G_1)| = |W(G_2)|$

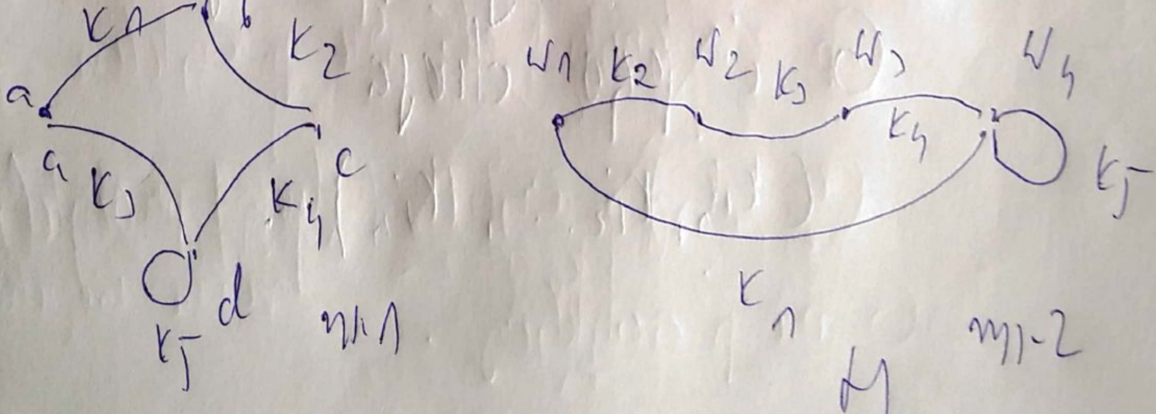
2°. $|K(G_1)| = |K(G_2)|$

Zad 2. Udowodnić Fakt 2.

Mówimy więc, że $|W(G)|$, $|K(G)|$ – są <u>niezmiennikami izomorfizmu</u>

W tym sensie rozumiemy <u>wykres</u> (rysunek) grafu – jako reprezentację klasy abstrakcji $[G]_{\cong}$.

P3. Weźmy dwa rysunki grafu (rys. 1-2).



rys. 1 rys. 2

G H

Możemy uznać, że:

rys. 1 reprezentuje graf G,

rys. 2 reprezentuje graf H.

Zauważmy, że można zdefiniować odwzorowanie

$$i : \{a, b, c, d\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$i(a) = v_1, \quad i(b) = v_2, \quad i(c) = v_3, \quad i(d) = v_4,$$

że

$$\{x, y\} \in K(G) \iff \{i(x), i(y)\} \in K(H),$$

co oznacza, że $G \cong H$, zatem rys. 1 i rys. 2 są („rodzinnie") reprezentacją tego samego (bo KLASY) grafu.

Pojęcie drogi (PATH – „ścieżka")

Przez **drogę** długości n w grafie G rozumiemy **ciąg** n krawędzi tego grafu

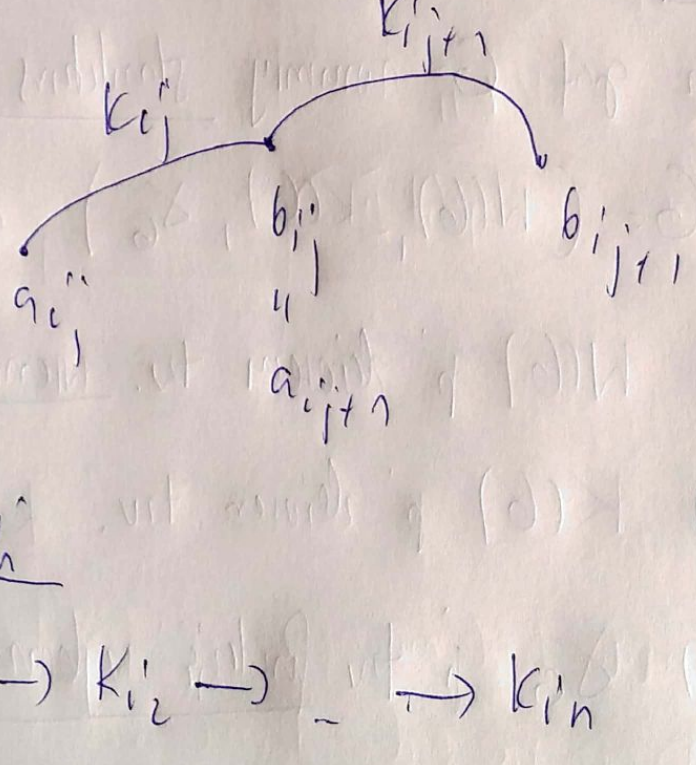
$(k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_n})$, i jeśli

$\gamma_G(k_{i_j}) = \{a_{i_j}, b_{i_j}\}$, to

jeden z wierzchołków $\{a_{i_j}, b_{i_j}\}$ jest końcem krawędzi następnej $k_{i_{j+1}}$, gdzie

dla $\gamma_G(k_{i_{j+1}}) = \{a_{i_{j+1}}, b_{i_{j+1}}\}$

$$|\{a_{i_j}, b_{i_j}\} \cap \{a_{i_{j+1}}, b_{i_{j+1}}\}| = 1 .$$



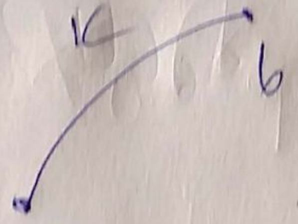
<u>Bywa też pisane</u>

$$k_{i_1} \to k_{i_2} \to \dots \to k_{i_n} .$$

Jeśli krawędzie k_{i_1} i k_{i_n} mają wspólny wierzchołek, to <u>drogę nazwiemy ZAMKNIĘTĄ,</u>

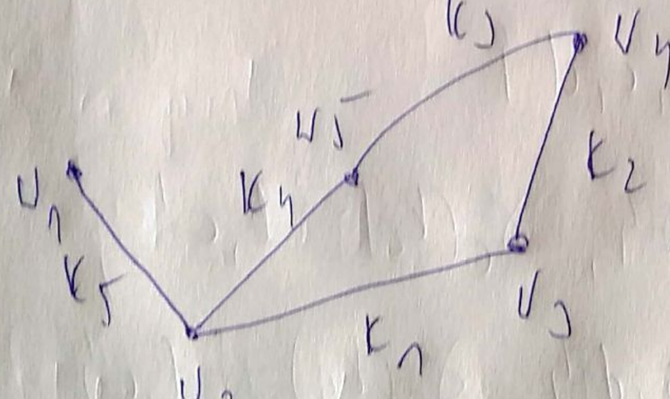
Uwaga 3:

(∗) Jeśli σ_G jest odwzorowaniem, to krawędź $k \in K(G)$ wyznaczona jest jednoznacznie przez $a, b \in W(G)$, gdy $\sigma_G(k) = \{a, b\}$.



(∗∗) Będziemy też pisali (a, b), chociaż a nie jest początkiem, a b końcem k!

P.4. Weźmy graf G reprezentowany przez rys.



(k_5) droga $n=1$

(k_1, k_2, k_3, k_4) – droga $n=4$, zamknięta

$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ droga $n=5$

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) = (\underbrace{v_2, v_3, v_4, v_5, v_2}_{\text{efekt „zamknięcia”}})$$

<u>Def 3 (graf prosty)</u>.

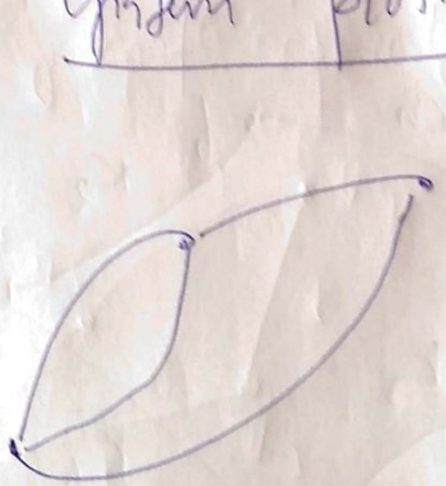
Każdy graf G, dla którego

(1) γ_G jest 1-1 (bez krawędzi wielokrotnych)

(2) bez <u>krawędzi zdegenerowanych</u> (bez pętli).

nazywamy <u>grafem prostym</u>.

<u>P.5</u>.



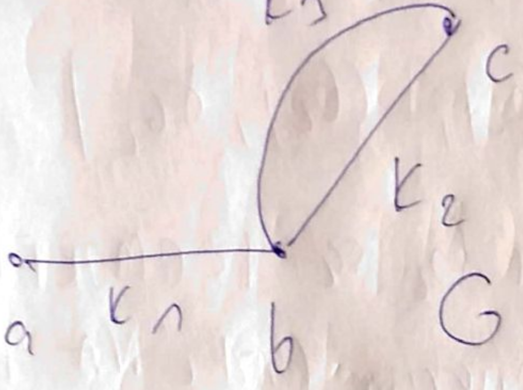
NIE JEST PROSTY.
DLACZEGO?

Def. 3 (droga prosta i cykl)

Każda droga złożona z różnych krawędzi nazywa się drogą prostą (SIMPLE PATH).

Jeśli dodatkowo jest ona zamknięta i składa się z różnych wierzchołków, to taką drogę nazywamy CYKLEM. (Cyklem mamy początek i koniec)

P. 6

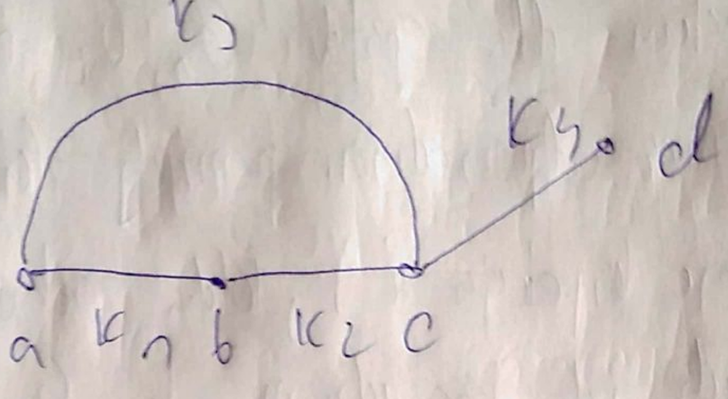


Weźmy drogę $(k_1, k_2, k_3) = k_1 \to k_2 \to k_3$

$= (a, b, c, b)$

NIE JEST ZAMKNIĘTA, „b" powtarza się.

P.7.



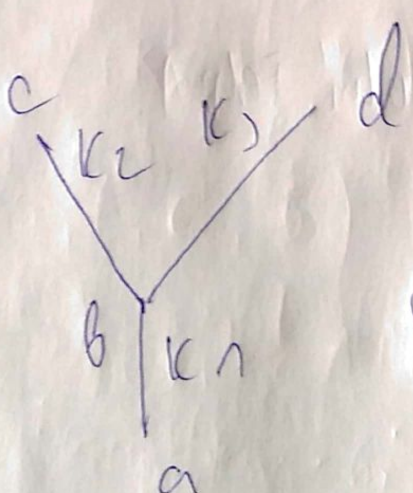
$k_1 \to k_2 \to k_3 = (a, b, c, a)$

CYKL.

Każdy graf, który nie zawiera cyklu nazywamy ACYKLICZNYM.

Graf z P7. nie jest acykliczny.

7.8.



graf acykliczny.

Dalej wygodnie będzie zdefiniować pojęcie podgrafu.

Def 4 (podgrafu).

Powiemy, że

$H = (W(H), K(H), \gamma_H)$ jest

podgrafem $G = (W(G), K(G), \gamma_G)$,

jeśli

(i) $W(H) \subset W(G)$

$K(H) \subset K(G)$

(ii) $\gamma_{G|K(H)} = \gamma_H$

P. 9. Niech dany będzie graf

G i jego droga

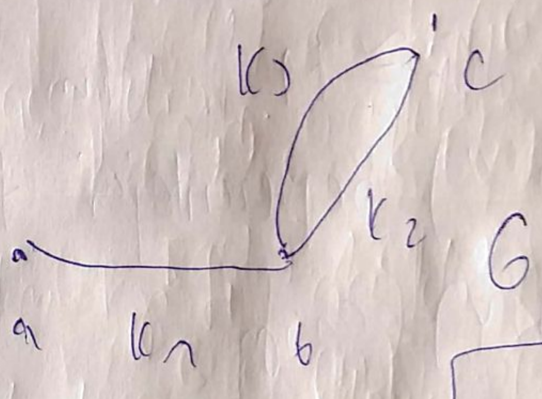
$(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_n})$.

Wtedy definiujemy podgraf
M grafu G, gdzie
$K(M) = \{k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_n}\}$.

Jeśli teraz dla drogi $(k_{i_1}, \dots, k_{i_n})$ odpowiadający
jej podgraf jest acykliczny, to mówimy, że
ta droga jest acykliczna.

<u>P.10.</u>

Graf NIE jest prosty!



Droga

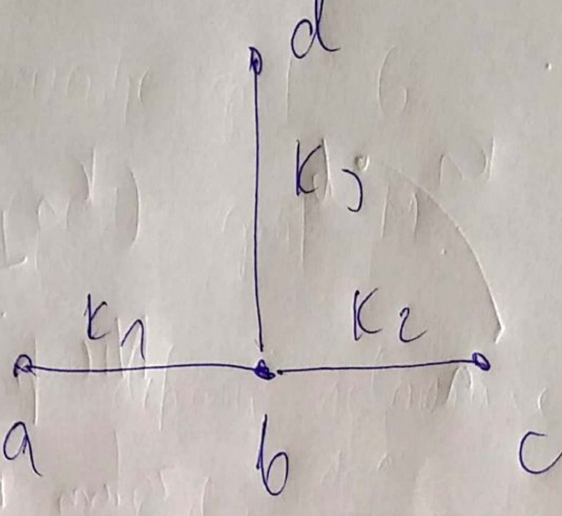
$$(k_1, k_2, k_3, k_1) = (a, b, c, b, a)$$

jest zamknięta, ale nie jest cykliczna.

(k_2, k_3) – cykl (droga prosta, zamknięta,
różne wierzchołki).

G nie jest acykliczny.

P.11.



graf acykliczny.

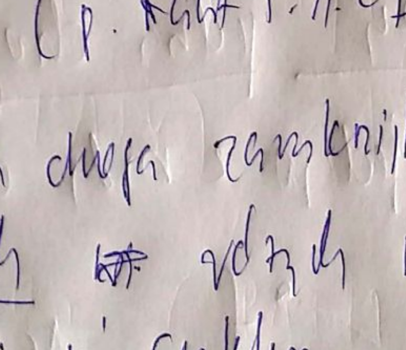
Tw 1 (O grafie acyklicznym) (5.1.1)

G jest acykliczny $\iff$ nie zawiera zamkniętej drogi prostej.

Uwaga 4 (p. Fakt 1.1.2 [RR])

Każda droga zamknięta złożona z co najmniej trzech ~~...~~ różnych wierzchołków jest prosta, czyli jest cyklem.

P.12

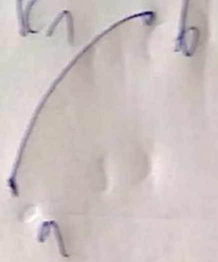


(k_1, k_2, k_1)

((NIE JEST, bowiem

$(a, \underbrace{b, c, b}, a)$

P17



$(k_1, k_2) = (a, b, a)$

Nie jest prosta

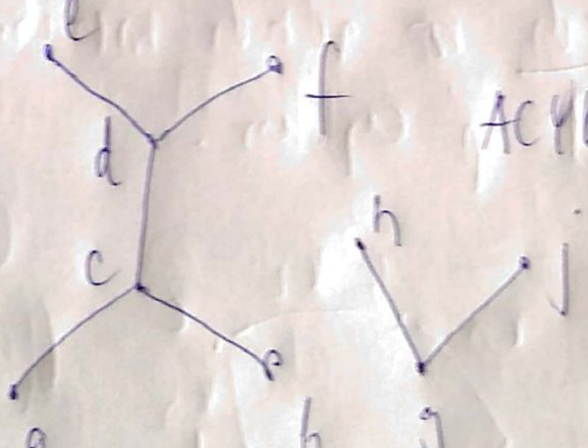
zatem nie może być CYKLEM.

Mamy tylko 2-wierzchołki

Tw 2 (II tw. o grafie acyklicznym) (5.1.2 [RR])

W każdym grafie acyklicznym, dla danych jego dwóch wierzchołków (różnych) istnieje co najwyżej jedna droga prosta prowadząca od jednego z nich do drugiego.

P14



ACYKLICZNY