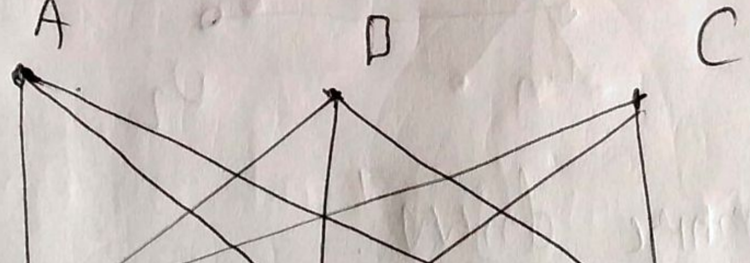
Kurs: Matematyka Dyskretna

Forma: Wykład Online (W.15)

Tryb: OnLine

Temat: Grafy planarne c.d. (dwudzielne), Drzewa.

Przypominamy, że mówimy o grafie G, że ma reprezentację planarną, jeśli można go narysować na płaszczyźnie w ten sposób, że krawędzie nie przecinają się.
Podaliśmy przykład grafu K_5 i jego reprezentacji planarnej.
Zacytowaliśmy też klasyczny przykład dotyczący tego zagadnienia — problem trzech mediów, który ilustruje poniższy rysunek



Jak pamiętamy, zagadki grafów planarnych formułowaliśmy w świetle tw. Eulera.

Aby rozstrzygnąć problem powyższy (cf. zadanie) potrzebujemy definicji.

<u>Def (graf dwudzielny)</u>

Powiemy, że $G = (W(G), K(G), \gamma_G)$ jest <u>grafem dwudzielnym</u>, jeśli

a) $W(G) = W_1 \dot{\cup} W_2$

b) $\forall_{k \in K(G)} \exists_{w_i \in W_i} \gamma(k) = \{w_1, w_2\}$

<u>Jeśli dodatkowo</u> każde dwa wierzchołki (odp. z W_1 i W_2) łączy krawędź, to G nazywamy <u>pełnym grafem dwudzielnym</u> i oznaczamy go $K_{m,n}$, $m = |W_1|$, $n = |W_2|$.

Jasne, że $K_{m,n} \cong K_{n,m}$.

Zauważmy, że graf z przykładu wyżej to $K_{3,3}$.

Przypomnijmy, że twierdzenie Eulera o grafach planarnych mówi, że (p. Tw. 5.4.1 [RR])

$$r = |K(G)| - |W(G)| + 2,$$

gdzie r = # regionów grafu planarnego G.

<u>Z niego wynika, że</u>:

<u>Wn 1</u>. Dla grafu planarnego (Wn 5.4.1 [RR])

$$|K(G)| \le 3|W(G)| - 6$$

<u>Wn 2</u>. Dla grafu dwudzielnego planarnego (Wn 5.4.2 [RR])

$$|K(G)| \le 2|W(G)| - 4.$$

Zauważmy, że Wn 2 pozwala <u>rozstrzygnąć</u> problem o mediach. Mamy tam:

$|W(G)| = 6$, $|K(G)| = 9$, dlatego warunek <u>NIE JEST SPEŁNIONY!</u>

Dlatego nie da się podłączyć mediów tak, aby nie przecinały się

Uwaga (dla ambitnych)

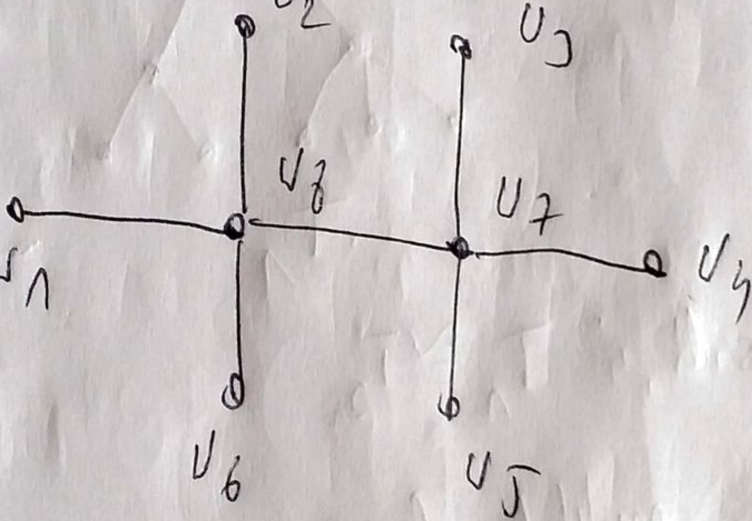
Grafy dwudzielne mają związek z tw. Halla (p. rozdział 4.4 [RR]) i pozwalają rozwiązać podstawowy „problem kojarzenia par" (p. Przykład 4.4.19 [RR] oraz rozdział 5.5 [RR]), który prowadzi do tzw. grafów dwudzielnych skojarzonych (p. Tw. 5.5.1 [RR])

Drzewa

Def (drzewa)

Każdy acykliczny i spójny graf będziemy nazywali DRZEWEM, które oznaczamy przez T.

P.1



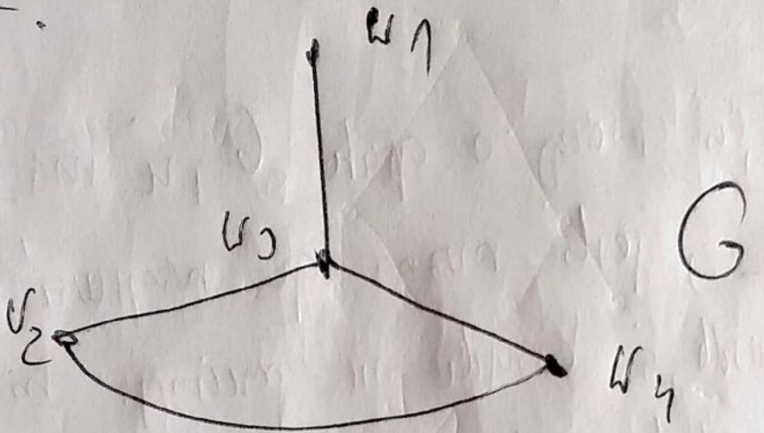
Każdy $w \in V(T)$, $\deg(w) = 1$ będziemy nazywali LIŚCIEM drzewa T.

Zatem T z P1 ma 6 liści.

Fakt 1 (p. Fakt 5.6.1 [RR])

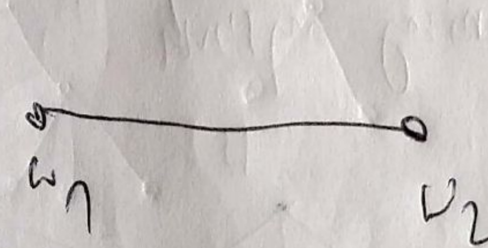
Jeśli T jest drzewem o $n \geq 2$ wierzchołkach, to T posiada co najmniej dwa liście.

P2.



Tylko dla v_1 mamy $\deg(v_1) = 1$, ale G nie jest drzewem!

P3.



Najmniejsze drzewo!

G

Podstawowe twierdzenie o drzewach podające ich charakteryzacje (p. Tw. 5.6.1 [RR])

Tw. (o drzewach).

Niech G będzie grafem prostym (bez pętli i δ_G 1-1) o n wierzchołkach.

NWSR

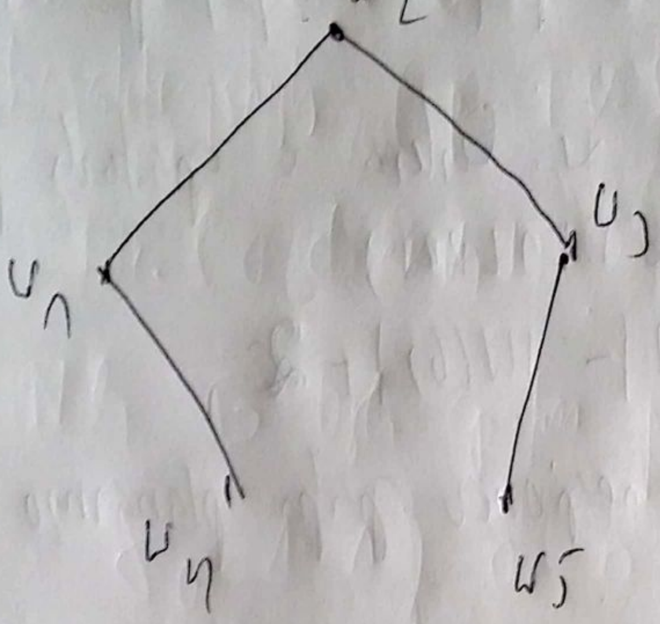
(i) G jest drzewem

(ii) $|K(G)| = n-1$ i G jest acykliczny

(iii) $|K(G)| = n-1$ i G jest spójny.

Pr. Niech G będzie taki, że $|W(G)| = 5$

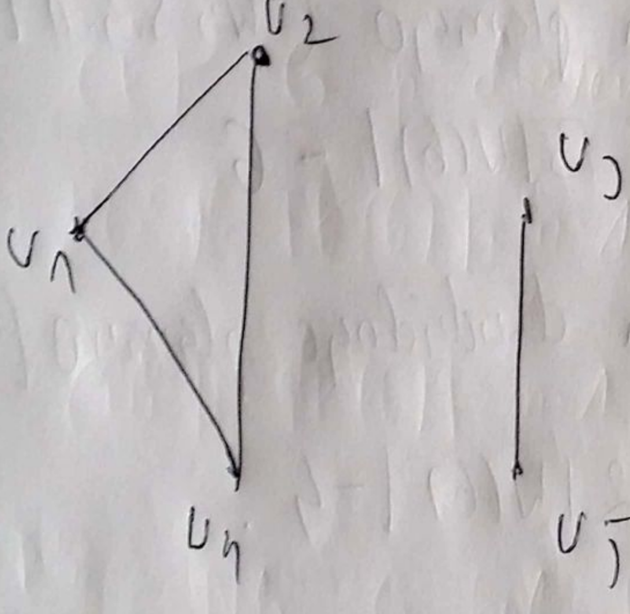
oraz $|K(G)| = 5-1 = 4$.



$G = T$

<u>Drzewo</u>:

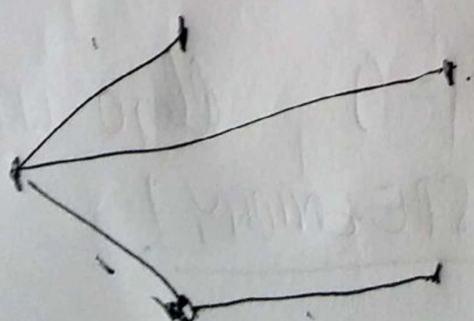
$\deg(v_4) = \deg(v_5) = 1$



$G \neq T$

$\deg(v_3) = \deg(v_5) = 1$

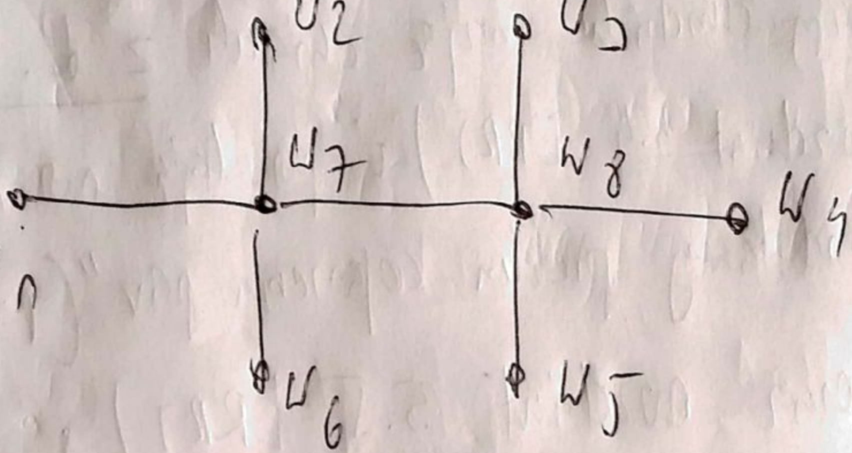
Nie jest spójny i <u>nie jest acykliczny</u>.



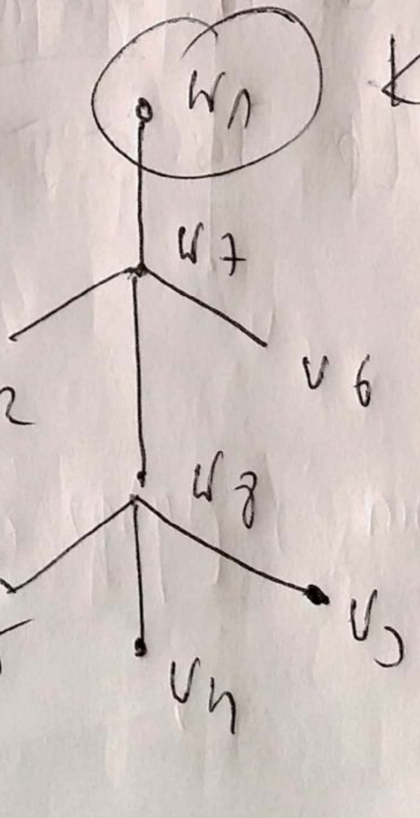
Jak spójny, to
<u>acykliczny</u> (!)
ale $G = T$.

Niech T będzie drzewem - wtedy wygodnie jest spojrzeć na T z punktu widzenia wybranego wierzchołka ~~[illegible]~~ - nazywamy go KORZENIEM

P.S.



po zmianie orientacji:



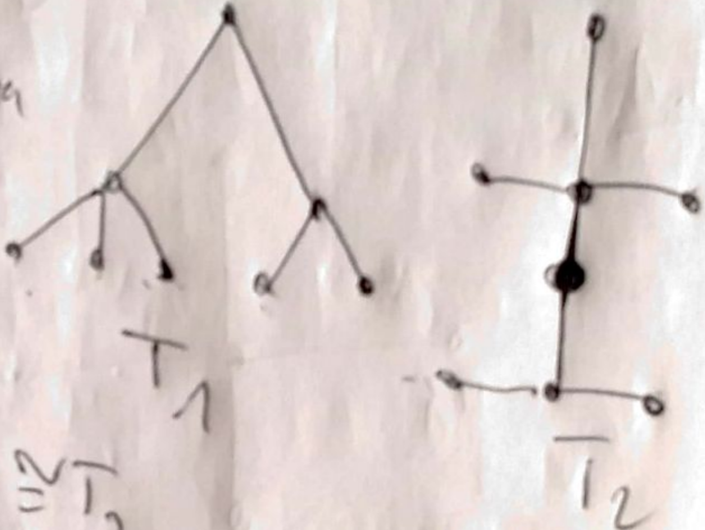
KORZEŃ

P6. (Drzewo przeszukiwań binarnych) (P. 5.6] [RR]).

Analiza przykładów 5.6] [RR] – praca samodzielna. str. 207 – 209.

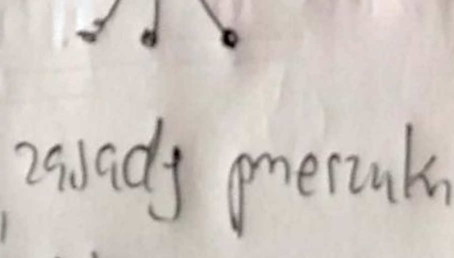
Zadania.

① . Dane są drzewa



Uzasadnić, że $T_1 \cong T_2$

② Na przykładzie drzewa



wyjaśnić „zasadę przeszukiwań binarnych" (p. P.6).