Kurs: Matematyka Dyskretna

Forma zajęć: Wykład

Tryb ONLINE / termin 24.02

Wykład 2

Temat. Przegląd funktorów c.d. Predykat jako uogólnienie zdania.

Kontynuujemy przegląd funktorów 2-argumentowych.

- funktor koniunkcji (AND) oznaczany przez „$\wedge$"

opis konstrukcji:

dla $p, q \in \mathcal{L}$ i uporządkowanej (p, q) tworzymy

$$(p, q) \longrightarrow r \overset{df}{=} p \wedge q \in \mathcal{L},$$

gdzie zdanie złożone r czytamy

„wypowiedź p i wypowiedź q",

a zdanie $r = p \wedge q$ nazywamy koniunkcją zdań p i q.

ZASADA WYCENY $p \wedge q$

$r \equiv 1$ dokładnie wtedy, gdy obie p, q są prawdziwe.

TABELA 1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

FAKT 1 (o koniunkcji)

$\forall\, p,q \in \mathcal{L}$ mamy:

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (przem.)

b) $p \wedge 1 \equiv 1 \wedge p \equiv p$ (zas. ident)

c) $p \wedge 0 \equiv 0 \wedge p \equiv 0$ (zasada dominacji)

d) $p \wedge (\neg p) \equiv 0$ (zasada sprzeczności)

e) Niech dodatkowo $r \in \mathcal{L}$ i ustalmy kolejność $(p,q,r) = (p,(q,r))$

Wtedy $(p,q,r) = ((p,q),r)$ i dostajemy

$$\begin{tikzcd} (p,q,r) \arrow[r] \arrow[dr] & (p\wedge q)\wedge r \arrow[d, phantom, "\equiv"] \\ & p\wedge(q\wedge r) \end{tikzcd}$$

(zasada łączności).

Dlatego piszemy też $p \wedge q \wedge r$

ZADANIE. Udowodnij Fakt 1

FAKT 2

Funktor $\wedge$ jest [illegible], dlatego można go skonstruować za pomocą $\vee, \neg$, gdzie

$$\forall_{p,q \in L} \quad p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \quad (\#1)$$

Dowód

ZADANIE 2

Uwaga. I na odwrót, mając $\neg, \wedge$, można zdefiniować $\vee$, bowiem

$$p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q) \quad (\#2)$$

WNIOSEK 1

Wzory #1, #2 nazywamy prawami de Morgana

Dokładniej, częściej zapisuje je

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad (\#3)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad (\#4)$$

3

Uwaga

W zastosowaniach używa się innych znaków (funktorów):

DYSJUNKCJA oznaczana „/" (NAND)

$$p / q \overset{df}{=} \neg(p \wedge q) \quad \text{(tzw. f. Scheffera)}$$

BINEGACJA oznaczana „↓" (NOR)

$$p \downarrow q \overset{df}{=} \neg(p \vee q) \quad \text{(tzw. f. Peirce'a)}$$

ZAD 3

Zdefiniuj funktor „/" za pomocą „↓" i na odwrót.

ZAD 4.

Kiedy $p / q \equiv p \downarrow q$?

Funktor różnicy symetrycznej XOR oznaczamy $\oplus$

$$p \oplus q \overset{df}{=} (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

ZAD 5 Zbuduj tabelę logiczną dla $\oplus$, $/$, $\downarrow$

ZAD 6.

Sprawdź, czy funktory $\oplus$, /, $\downarrow$ są tożsame.

- funktor implikacji oznaczamy „$\rightarrow$"

Opis konstrukcji:

$p, q \in \mathcal{L}$, uporządkowana (p, q)

$(p, q) \longrightarrow r \stackrel{df}{=} (p \rightarrow q) \in \mathcal{L}$,

gdzie zdanie złożone r czytamy

„JEŚLI wypowiedź p TO wypowiedź q"

Wtedy zdanie r nazywamy IMPLIKACJA,

ZASADA WYCENY

Z fałszu może wynikać cokolwiek, z prawdy tylko prawda.

Zatem

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	1	1
1	0	0

__Uwaga__ 1) Jeśli zdanie $p \to q$ jest prawdziwe, to piszemy $p \Rightarrow q$. Mówimy wtedy, że mamy WYNIKANIE LOGICZNE.

Wtedy z prawdy może wynikać tylko prawda.

2) zdanie $p \to q$ nie __musi być prawdziwe__!

3) funktor „$\to$" nie __jest przemienny__

4) jeśli mamy $p \Rightarrow q$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{przyczyna} & \text{skutek} \\ \text{„warunek dostateczny"} & \text{„warunek konieczny"} \end{array}$$

__FAKT__ $\forall\, p, q \in \mathcal{L}$ mamy

1) $p \to q \not\equiv q \to p$

2) $(p \to q) \equiv \neg p \lor q$

3) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ (zasada negacji)

4) $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$ (zasada transpozycji)

Dowód.

ZAD 6.

ZAD 7. Sprawdź, czy $\to$ jest łączny.

Uwaga a) pkt 2 Faktu 3 pokazuje, że $\to$ jest łączny.

b) pkt 1 Faktu 3 pokazuje, że $\to$ nie jest przemienny.

Symetryczny wniosek, jeśli weźmy

$$(p,q) \to r \overset{\text{df}}{=} (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Wtedy zapisujemy $r = (p \Leftrightarrow q)$ i „$\Leftrightarrow$" nazywamy funktorem równoważności.

ZAD 8

Udowodnij, że zdanie $p \Leftrightarrow q$ jest prawdą, dokładnie wtedy, gdy $p \equiv q$.

Piszmy wtedy $p \Leftrightarrow q$, a nie $p \equiv q$, zapiszmy też $p \Leftrightarrow q$

ZAD 9

Sprawdź, czy $\Leftrightarrow$ jest łączny.

Def. Każde zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe nazywamy TAUTOLOGIA, ZATEM WŁASNOŚCI FUNKTORÓW SĄ PRZYKŁADAMI TAUTOLOGII.

Przykład

Udowodnić, że zdanie

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

jest tautologią, czyli

$$\forall_{p,q \in \mathcal{L}} \left[p \wedge (p \to q) \right] \Rightarrow q$$

<u>Dowód</u>. Z własności funktora $\to$ wystarczy pokazać, że z PRAWDY wynika PRAWDA.

Niech zdanie

$$p \wedge (p \to q) \equiv 1.$$

Wtedy $p \equiv 1$ (dlaczego?) oraz $(p \to q) \equiv 1$

Zatem $q \equiv 1$.

<u>ZAD 10</u>.

Udowodnij powyższe stwierdzenie stosując fakt, że funktor $\to$ <u>jest maksem</u>.

Weźmy jeszcze jedno zdanie złożone dla $p, q \in \mathcal{L}$

(*) $(p \to q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to s]$,

gdzie $s \equiv 0$

FAKT 4

ZDANIE (*) jest tautologią, czyli

$$\forall_{p,q \in \mathcal{L}} \quad (p \to q) \equiv [(p \wedge \neg q) \to s],$$

a więc $(p \to q) \equiv 1$ dokładnie wtedy, gdy

zdanie $(p \wedge \neg q) \to s$ jest prawdziwe.

Tautologię tę nazywamy REDUCTIO ADSURDUM,

DOWÓD

Jeśli $p \equiv 0$, to $(p \to q) \equiv 1$ oraz

$$[(p \wedge \neg q) \to s] \equiv 1$$

Niech $p \equiv 1$.

Gdy $q \equiv 0$, to

$$(p \to q) \equiv 0 \quad \text{oraz}$$

$$\left[\underbrace{(p \wedge \neg q)}_{\equiv 1} \to \underset{0}{s}\right] \equiv 0.$$

Jeśli $q \equiv 1$, to

$$(p \to q) \equiv 1, \quad \underbrace{\underset{\equiv 0}{(p \wedge \neg q)} \to \underset{0}{s}}_{\equiv 1}$$

co kończy dowód.

Dalej pokażę sposób wykorzystania (*).

Predykat jako uogólnienie zdania logicznego.

Uwaga predykat $\equiv$ forma zdaniowa

Predykat, jest to wypowiedź z parametrem (parametrami), która staje się zdaniem w wyniku procesu substytucji wartości tego parametru.

Oznaczamy je przez $\varphi(x)$, $x \in D_\varphi$, gdzie D_φ nazywamy dziedziną predykatu φ.

Wtedy dla $x_0 \in D_\varphi$, $\varphi(x_0)$ jest zdaniem, być może fałszywym.

ZAD 11

Zapoznać się z P 1.3.1, 1.3.2,

Uwaga. Mając predykat φ z dziedziną D_φ, zdanie logiczne można skonstruować co najmniej na trzy sposoby:

1°. $\varphi(x_0)$, $x_0 \in D_f$

2°. $\forall_{x \in D_\varphi} \varphi(x)$

3^0. $\exists_{x \in D_\varphi} \varphi(x)$

Wtedy $\forall$, $\exists$ nazywamy <u>kwantyfikatorami</u>, odpowiednio OGÓLNYM i SZCZEGÓLNYM.

<u>FAKT 1</u>.

$\forall$ jest uogólnieniem koniunkcji, $\exists$ alternatywy.

Ponadto

$$\left.\begin{aligned} \neg\left(\forall_{x \in D_\varphi} \varphi(x)\right) &\equiv \exists_{x \in D_\varphi} \neg\varphi(x) \\ \neg\left(\exists_{x \in D_\varphi} \varphi(x)\right) &\equiv \forall_{x \in D_\varphi} \neg\varphi(x) \end{aligned}\right\} \text{uogólnione prawa de Morgana}$$

<u>Dowód</u>. <u>ZAD 12</u>.

<u>ZAD 13</u>. P. 1.2.7.

<u>ZAD 14</u>. Zapoznać się z P. Faktem 1.3.1.

Twierdzenie matematyczne i jego dowód.

Ad do przykładu zdania złożonego prawdziwego

$$Z \Longrightarrow T \quad \text{TWIERDZENIE}$$

założenie $\qquad$ teza

Bardzo często $Z = \underbrace{Z_1 \wedge Z_2 \wedge \ldots \wedge Z_n}_{n\text{ - założeń}}$.

Przykład.

Jeśli trójkąt jest prostokątny o przyprostokątnych a, b, przeciwprostokątnej c, to

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Czasami mamy $Z \Longleftrightarrow T$, wtedy mówimy, że mamy pełną charakteryzację.

ZADANIE. P. 1.4.1, Uwaga 1.4.3, str. 20–22.