Kurs: Matematyka Dyskretna

Forma zajęć: Wykład

Tryb: On-line / termin...

Wprowadzenie.

Kurs składa się z 15, 2h wykładów. Wykład uzupełniany jest ćwiczeniami (15 x 2h).

W trybie on-line student przypisany jest do właściwego CLASSROOMU na platformie Google Suite.

Zajęcia odbywają się zgodnie z harmonogramem. Ćwiczenia są obowiązkowe.

Komunikacja wykładowca ⟷ studenci odbywa się 3-kanałowo:

1) poprzez e-mail rzebowski@gmail.com

2)* poprzez komunikaty i informacje zamieszczane na stronie wykładowcy

www.pwsz.legnica.edu.pl/~rzebowskiw

3) poprzez narzędzia CLASSROOMU (dedykowane wykładom i ćwiczeniom oddzielnie) w ramach zakładek: Strumień, Zadania, Oceny.

Obie formy zajęć zaliczane są na ocenę.

Ćwiczenia: na podstawie 2 kolokwiów (terminy zostaną podane wkrótce).

Wykład. Student, który uzyska co najmniej oceny 3,0 może przystąpić do egzaminu w ramach sesji podstawowej lub poprawkowej.

* Proszę śledzić zakładki www:

- Aktualności
- Matematyka Dyskretna (studia stacjonarne)
- Zajęcia w trybie on-line
- Konsultacje

Literatura

Wykład
- [R.R] Matematyka Dyskretna dla Informatyków, S.U. PWSZ Legnica
- R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik Matematyka Konkretna

Ćwiczenia: [R.R & J.Pt] Zbiór zadań z mat. dyskretnej dla informatyków

Uwaga. Kształcić wykłady obligatoryjne!!!

Informacje n/t kursu:

Proszę zapoznać się z wpisem w zakładce Matematyka Dyskretna (studia stacjonarne).

** Zamieszczam zadania i problemy do wykorzystania w trybie fakultatywnym.

Wpiszę te pierwsze w oknie, które nie będzie zbiorem zadań i podręcznika.

Temat Elementy logiki matematycznej – wstęp do algebr Boole'a.

Materiał do przeczytania: [RR] (str. 1A – Rozdział I (1–24)).

1⁰. Pojęcie zdania logicznego.

Ustalmy dwie mnogości: W, O, gdzie

(i) $w \in W$ oznacza, że w jest odpowiednio sformułowany np. w j. polskim (np. zdaniem względnie lub podrzędnie złożonym, ale jak zobaczymy dalej nie tylko!)

(ii) $\mathcal{O}$ jest mnogością złożoną z dwóch elementów, które mogą przedstawić na różne sposoby:

α) TAK, NIE

β) PRAWDA, FAŁSZ

γ) 1, 0.

Dalej przyjmujemy, że TAK, PRAWDA to synonimy reprezentujące „1"

NIE, FAŁSZ to synonimy reprezentujące „0"

i $\mathcal{O} = \{0, 1\}$

(iii) W składa się tylko z tych wypowiedzi, dla których można przeprowadzić przyporządkowanie

$W \ni w \longrightarrow$ dokładnie jeden element z $\mathcal{O}$.

Jeśli tak będzie, to będziemy pisali $W = \mathcal{L}$, i wtedy każdy wypowiedź $w \in \mathcal{L}$

z definicji nazwiemy „zdaniem logicznym"

bo wypowiedź

bo można zrealizować przyporządkowanie

$\mathcal{L} \ni W \longrightarrow o \in \mathcal{O}$

$o = 0$ lub $o = 1$.

<u>Uwagi</u>.

1°. Wynik przyporządkowania

$\mathcal{L} \ni W \longrightarrow o \in \mathcal{O}$ będą nazywali

„wyceną" (oceną) logiczną wypowiedzi W.

Jeśli $W \longrightarrow 1$, to będą pisali

$W \equiv 1$ i mówili

„zdanie W jest prawdziwe",

jeśli $W \longrightarrow 0$,

$W \equiv 0$

„zdanie W jest fałszywe".

2°. Powstaje problem, a) Kto ma dokonać tej wyceny? b) Czy p ona uniwersalna (obiektywna).

Na tym etapie pomijamy te kwestie. Wrócimy do nich później.

3°. Nie każda wypowiedź p zdaniem logicznym, a nie mnogości W i $\mathcal{L}$ są różne ($\mathcal{L} \subsetneq W$).

Przykłady. Patrz [RR].

Uwaga. Dalej jeśli $w \in \mathcal{L}$, to oznacza, iż znamy wartość logiczną w.

Będziemy mówili, iż taka w p „zdaniem prostym".

2°. Pojęcie funktora i zdania złożonego.

Dalej elementy zbioru $\mathcal{L}$ będziemy oznaczać literami (małymi): p, q, r, s itd.

Weźmy dwa elementy, np. p, q z zbioru $\mathcal{L}$.

Algorytm konstrukcji zdania wynikowego z p, q

a) ustal kolejność wśród p, q.
Np. (p, q) oznacza, że p jest na miejscu I
(q, p) — " — II

b) wykonaj przyporządkowanie

$$(p, q) \longrightarrow r \in \mathcal{L}$$

Komentarz.
Ze zdań logicznych występujących w kolejności p, q, konstruujemy odpowiedni r, które nazywamy wynikiem.

○ Każdy r, który powstał wg. zasady powyżej będziemy mówili, że r jest „zdaniem logicznym złożonym” powstałym ze zdań logicznych prostych: p, q.

Uwagi:

1) Ważna jest (jak zobaczymy dalej) kolejność (p, q), czyli

$$(p, q) \longrightarrow r \in \mathcal{L}$$

$$(q, p) \longrightarrow r' \in \mathcal{L}$$

oraz r i r' mogą mieć różne wartości logiczne.

2) Co powoduje, że

$$(p, q) \longrightarrow r$$

jest możliwe do zrealizowania?

Odp. Można to zrobić za pomocą FUNKTORA, albo operatora na zd. logicznych prostych.

Klasyfikacja funktorów.

FUNKTORY

jednoargumentowe   dwuargumentowe.

jednoargumentowe

Potrzebne jest tylko jedno zdanie logiczne. Będziemy uważali tylko jeden taki funktor, oznaczany „¬" lub „~" i nazywany funktorem NEGACJI

Będziemy pisali:

$\mathcal{L} \ni p \longrightarrow r = \neg p \in \mathcal{L}$

i czytali

„nie prawda, że p", gdy

chcieliśmy „$\neg$" p[o] następstwu

jeśli $p \equiv 1$, to $\neg p \equiv 0$

jeśli $p \equiv 0$, to $\neg p \equiv 1$

Lub prościej

$\neg 1 \equiv 0$, $\neg 0 \equiv 1$

Uwaga „$\neg$", to NOT w IT

Więc zdanie złożone $\neg p$ nazwiemy <u>negacją</u> zdania prostego p.

Patrz P. 1.2.1 [RR]

FAKT 1 (Podstawowa zasada logiki „Podwójnej negacji”).

$$\forall_{p \in \mathcal{L}} \quad \underbrace{\neg(\neg p)}_{\text{podwójna iteracja negacji}} \equiv p$$

nie zmienia wartości logicznej zdania

Dowód. Mamy tylko dwa przypadki: albo $p \equiv 1$, albo $p \equiv 0$.

Zatem

$$\neg(\neg 1) = \neg(0) = 1, \text{ bądź}$$

$$\neg(\neg 0) = \neg(1) = 0, \text{ co}$$

zapisujemy $\neg(\neg p) \equiv p$

//

Uwaga.

W konstrukcji $\neg p$, p jest zdaniem prostym,

natomiast w $\neg(\neg p)$, $\neg p$ jest zdaniem prostym.

Zatem pojęcie zdania prostego (a więc i złożonego) jest pojęciem względnym (zależy od kontekstu).

Przegląd funktorów dwuargumentowych.

- funktor alternatywy (OR) oznaczany przez „$\vee$"
  opis konstrukcji
  dla $p, q \in \mathcal{L}$, uporządkowanej, np. (p, q)
  i wzrost przyporządkowane

$$(p, q) \longrightarrow r = p \vee q \in \mathcal{L},$$

gdzie zdanie złożone r czytamy
„wypowiedź p LUB wypowiedź q",
a zdanie $r = p \vee q$ nazywamy <u>alternatywą</u>
(tylko l. pojedyncza).

<u>ZASADA WYCENY</u> $p \vee q$

$r \equiv 1$ dokładnie wtedy, gdy co najmniej jedno ze zdań p, q było prawdziwe. W przeciwnym razie $r \equiv 0$.
Zatem mamy (tzw. TABELA LOGICZNA)

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

FAKT 2 (o alternatywie)

$\forall p, q \in \mathcal{L}$ mamy

a) $p \vee q \equiv q \vee p$ (przemienność)

b) $p \vee 0 \equiv 0 \vee p \equiv p$ (zasada identyfikacji)

c) $p \vee 1 \equiv 1 \vee p = 1$ (zasada dominacji)

d) $p \vee (\neg p) \equiv 1$ (zasada wyłączonego środka, zwana też „tertium non datur"

↳ (tł. „trzeciej możliwości nie ma")

e) Weźmy trzy zdania p, q, r oraz ustalmy je w kolejności (p, q, r). Wtedy, jeśli tę trójkę potraktujemy następująco $((p,q), r)$, to możemy przeprowadzić konstrukcji

$(p,q,r) \longrightarrow (p \vee q) \vee r$

$\parallel \qquad\qquad\qquad \downarrow$

$((p,q),r)$ nawias ustala PRIORYTET

Mamy

$$\underset{p,q,r}{\forall} \left((p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \right)$$

i dlatego dalej piszemy $p \vee q \vee r$ (bez nawiasu).

JA to zasada łączności.

ZADANIE 1. Udowodnić FAKT 2

ZADANIE 2 P. 1.2.2 z [RR]