Kurs: Matematyka DYSKRETNA

Forma: Wykład

Tryb: OnLine

W.10

Temat. Porządki słownikowe. Wprowadzenie do metod zliczania.

Przypomnienie.

Dla $A \neq \emptyset$ skończ. (Alfabet), rozważ. zbiór wszystkich słów powstałych z A, $S(A)$, gdzie

$$s \in S(A) \equiv s = a_1 a_2 \ldots a_k, \; a_j \in A.$$

Zdefiniujmy teraz sposób porządku $S(A)$ – słownikowy porządek leksykograficzny (SPL) oznaczony „$\preccurlyeq_L$".

Def (SPL).

$$\forall_{s_1, s_2 \in S(A)} \; s_1 \preccurlyeq_L s_2 \iff$$

1°. $\exists s \in S(A)$ $s_2 = s_1 s$, albo

2°. $s_1 = xs$, $s_2 = xs'$ i pierwsza litera słowa s poprzedza pierwszą literę słowa s' w sensie porządku w A, gdy x jest dowolnym, być może pustym słowem.

Uwaga.
Def (SPL) wymaga danego p. częściowego na A.

Wyjaśnimy $\preceq_L$ na przykładach.

Pr 1. Niech $A = \{a, b, c\}$, $a < b < c$

Bierzemy (i) $s_1 = ab$, $s_2 = abc$

Wtedy $s_1 <_L s_2$, bowiem $s_1 s = s_2$, $s = c$

(ii)
$s_1 = caab$, $s_2 = caacc$

Mamy $s_1 = xs$ $\qquad s_2 = xs'$

$x = caa$ $\qquad x = caa$

$s = b$ $\qquad s = cc$

Ponieważ $b < c$, to

$s_1 <_L s_2$.

P2 (7.5.12 [RN])

Nch $A = \{a, b\}$, gdzie $a <_A b$.

Weźmy słowa z $S(A) \cup \{\lambda\}$ w kolejności:

$\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \ldots$

Wtedy sąsiedzi są następnikami poprzednich

$aa < aaa$ itd.

Jeśli $s \in S(A)$ i zawiera ono $b \in A$, to

$$\forall_n \underbrace{aa \ldots a}_{n} <_L s.$$

Tw. (o SPL)

Jeśli na A mamy częściowy porządek, to $\leq_L$ to

częściowy porządek na $S(A)$.

ZAD 1

Udowodnić Tw (o SPL).

Zad 2. (Ćw. 3.6.13 [RR])

~~Wstęp~~

Wprowadzenie do metod zliczania.

Wstęp. Zad 3. Przykład 4.1.3 [RR])

Zad 4. Przeczytać [RR] str. 122 - 124.

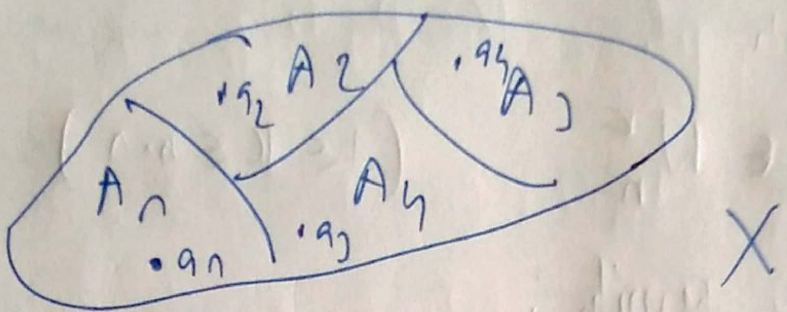
Zad 5. Studiować dokument: „Bardzo lekkie wprowadzenie do metod zliczania" [RR, 12.11.2016].

4 metody zliczania.

I. Zasada wielokrotnego wyboru (ZWW)

Niech $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ będzie partycją zb. skończonego X, gdzie $|A_j| = n_j$, $j = 1 \dots k$ $\left(\sum_{j=1}^{k} n_j = |X| \right)$

Bierzemy rodzinę W złożoną z tych k-elementowych podzbiorów X, które powstają w wyniku wyboru pojedynczych elementów z każdej partycji $\mathcal{P}$.



$(k=4)$

$W \in \mathcal{W} \iff W = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

W nazywamy wtedy SELEKTOREM $\mathcal{P}$.

W ogólności $W \in \mathcal{W} \iff W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$,

$$\forall_{1 \le j \le k} \; w_j \in A_j$$

Wtedy $\boxed{|\mathcal{W}| = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.}$ (#1)

P1. (3.4.1. [RR]).

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$, czyli $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, A_3\}$.

Wtedy zbiór W wszystkich rezultatów S ma postać:

$$W = \{ \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\} \}$$

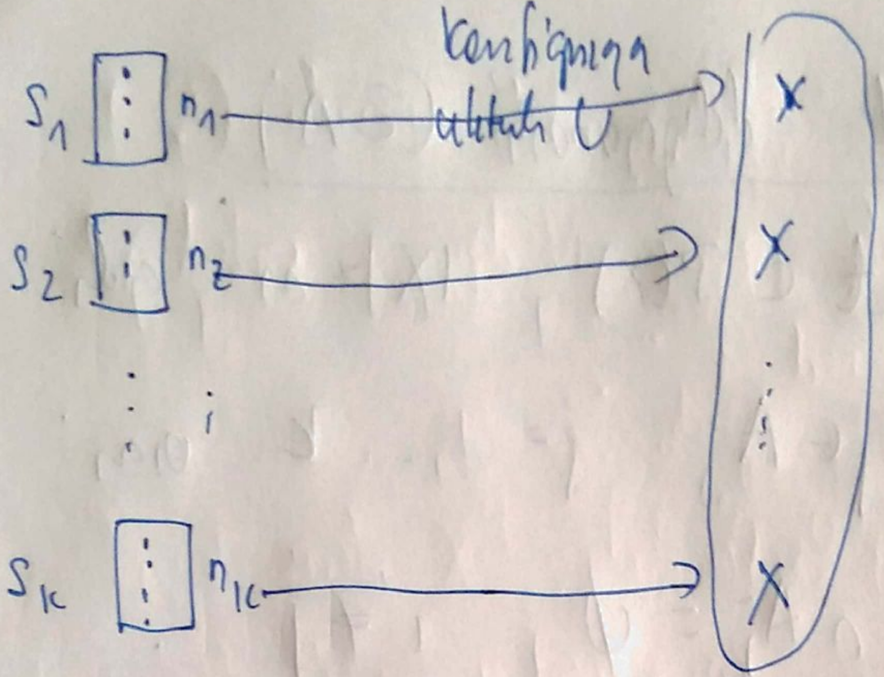
Zatem $|W| = 6$.

Z drugiej strony $n_1 = |A_1| = 1$, $n_2 = |A_2| = 2$, $n_3 = |A_3| = 3$, zatem

$$|W| = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$$

P.2. (4.4.2 [Ra]).

Porozmawiamy teraz o praktycznej interpretacji ZWW. Przypuśćmy, że mamy abstrakcyjny układ $\mathfrak{U}$, który przyjmuje k różnych stanów: $s_1, s_2, \ldots, s_k$, gdzie każdy ze stanów s_j przyjmuje jedną z n_j wartości



Wzór (#1) określa liczbę sposobów konfiguracji układu $\mathcal{U}$, czyli $|\mathcal{U}| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Zliczanie permutacji zbioru jako zastosowanie ZWW

Niech $|X| = n$. Każdą funkcję

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} X$$

nazwijmy **permutacją** zbioru X.

Mamy zatem sytuację:

$$f : \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & \ldots & n \\ \hline \cancel{x_{f(1)}} & \cancel{x_{f(2)}} & \ldots & \cancel{x_{f(n)}} \\ f(1) & f(2) & & f(n) \end{array}, \quad f(i) \in X$$

co zapiszmy wektorem

$$f = (f(1), f(2), \ldots, f(n)).$$

Dlatego f jest wynikiem uporządkowania (liniowego) wszystkich ~~[illegible]~~ elementów zb. X.

Oznaczmy przez $P(X)$ zbiór wszystkich permutacji zb. X.

Problem 1. $|P(X)| = ?$

Zastosujmy ZWW — przedstawione w P2.

U: $\sqcup \sqcup \sqcup \ldots \sqcup$

$S_1\ S_2\ S_3 \qquad S_n$

$|S_1| = n, \ |S_2| = n-1, \ \ldots \ |S_k| = n-k+1, \ \ldots, \ |S_n| = 1$

Dlatego $|P(X)| = n(n-1)\cdot(n-2)(n-3)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Potrzebujemy definicji

Def (SILNIA)

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n, & n \geq 2 \end{cases}$$

Dowód $|\mathcal{P}(X)| = n!$. (#2)

__Wniosek 1__. Jeśli $|X_1| = |X_2| = n$, to

$$|\mathcal{P}(X_1)| = |\mathcal{P}(X_2)| = n!,$$ dlatego

dalej będziemy pisali $\mathcal{P}_n$ $(= \mathcal{P}(X),\ |X| = n)$.

Niech X j.w. oraz weźmy $1 \leq r \leq n$

oraz $f: \{1, 2, \ldots, r\} \xrightarrow{1-1} X$

Zauważmy, że jeśli $r = n$, to $f \in \mathcal{P}_n$. Dlatego niech $r < n$.

Wtedy $f = (f(1), f(2), \ldots, f(r))$ jest ciągiem złożonym z różnych __wyrazów długości r__,

gdzie $f(i) \in X$.

Każdy taki ciąg nazywamy r-elementową wariacją bez powtórzeń zbioru n-elem. X.

Zbiór wszystkich takich f oznaczamy przez W^r_n.

Problem 2. $|W^r_n| = ?$

Zauważmy, że mamy wykorzystać pewne rozumowanie

$$\underset{S_1}{\sqcup}\ \underset{S_2}{\sqcup}\ \underset{S_3}{\sqcup}\ \dots\ \underset{S_r}{\overset{r}{\sqcup}}$$

$|S_1| = n \quad |S_2| = n-1 \quad |S_3| = n-2 \quad |S_r| = n-(r-1)$

Stąd

(#1) $$|W^r_n| = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$$

Ale $$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-r)}(n-r+1)\cdot\ldots\cdot n}{\cancel{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-r)}}$$

zatem

(#2) $$|W^r_n| = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Oczywiście, jeśli $r = n$, to

$W_n^n = P_n$ oraz

$|W_n^n| = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = |P_n|$.

Niech X j.v., ustalmy $0 \le k \le n$ oraz niech

$\mathcal{A}_k = \{A \in P(X) : |A| = k\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset\}$, $\mathcal{A}_n = \{X\}$,

czyli $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_n| = 1$.

Dlatego dalej możemy zakładać, że $1 \le k \le n-1$.

Problem? $|\mathcal{A}_k| = ?$

Rozumujemy następująco.

Wykorzystamy wynik (#3) i (#2).

Zauważmy, że

$f \in W_n^k \quad (1 \leq k \leq n-1)$

powstaje w wyniku:

(i) wybrania z X zbioru k-el. (stan S_1)

(ii) uporządkowania wszystkich elem (stan S_2).
tego zbioru

Możemy więc stosować ZWW:

$|W_n^k| = |S_1||S_2|$, gdzie

$|W_n^k| = |\mathcal{A}_k||P_k|$.

Ale z (#4) i (#2) mamy

$$\frac{n!}{(n-k)!} = |\mathcal{A}_k| \cdot k!,$$ skąd

$$|\mathcal{A}_k| = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\#5)$$

Dalej liczby $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ będą oznaczać $\binom{n}{k}$ i nazywać symbolem Newtona i czytać „n nad k".

FAKT (o $\binom{n}{k}$)

$$\forall_{n \geq 0} \ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\forall_{0 \leq k \leq n} \ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\forall_{1 \leq k \leq n} \ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Zad. 1

Udowodnić FAKT (p. str. 129 [RR]).

Inne własności $\binom{n}{k}$.

- Trójkąt Pascala (str. 130 [RR])
- wzór dwumianowy Newtona

II Zasada addytywności (ZA)

Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $|X| = n$, gdzie

$A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, k$ oraz

$A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Wtedy $\left| \bigcup_{j=1}^{k} A_j \right| = \sum_{j=1}^{k} |A_j|$ (#6).

Zad2. (P.4.4.3 [RR]).

Problem 4

Niech $|X| = n$, weźmy $\mathcal{P}(X)$.

$|\mathcal{P}(X)| = ?$

Zauważmy, że

$\mathcal{P}(X) = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n$,

gdzie $\mathcal{A}_k$ – rodzina k-el. podzb. X.

Z (ZA)

$$|P(X)| = \sum_{k=0}^{n} |A_k| .$$

Ale z (#5), $|A_k| = \binom{n}{k}$, dlatego

$$|P(X)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .$$

Ze wzoru dwumianu Newtona

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ,$$ dlatego

$$|P(X)| = 2^n \left(= 2^{|X|}\right) \text{ (\#6)}.$$