Kurs: Matematyka Dyskretna

Forma: Wykład

Tryb: On-Line W14

Temat: Cykle Eulera i Hamiltona. Grafy planarne.

Niech $G = (W(G), K(G), \gamma_G)$ będzie grafem.

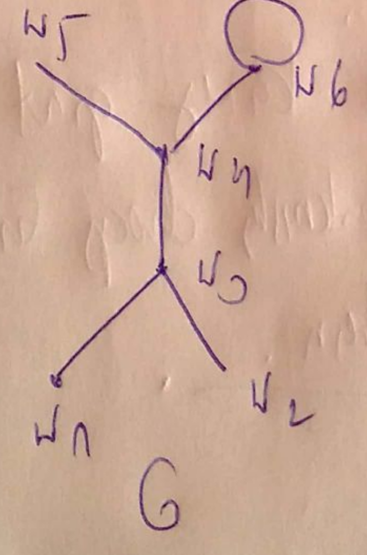
Definiujemy funkcję

$W(G) \ni w \longrightarrow \deg(w)$ – „stopień wierzchołka",

gdzie z definicji

$\deg(v) = \#$ niezdegenerowanych krawędzi, dla których v jest końcem $+ 2 \times \#$ pętli

P.n.



$\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_3) = 2$, $\deg(v_6) = 1 + 2 = 3$

Przez $D_k(G) = |\{w \in W(G) : \deg(w) = k\}|$

Np. dla G z P1

$$D_3(G) = |\{w_3, w_4, w_6\}| = 3.$$

Jeśli w grafie G

$$\forall_{w_1, w_2 \in W(G)} \deg(w_1) = \deg(w_2),$$ to powiemy, że

G jest regularny.

Wśród grafów regularnych występują tzw. grafy pełne, czyli (z def.) grafy proste, dla których każdy wierzchołek jest połączony krawędzią z każdym innym. Będziemy oznaczać go przez K_n (n – # wierzchołków

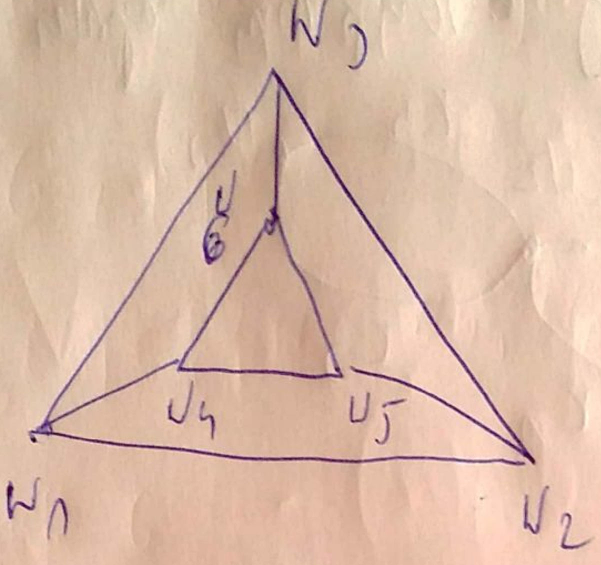
Zad 1.

Uzasadnić, że jeśli $G = K_n$, to

$$\forall w \in W(G), \deg(w) = n-1.$$

Zatem K_n jest regularny.

P2.



G

Zauw., że G jest regularny ($\deg(w_j) = 3$), ale nie jest pełny.

Każdy wie, że „kij ma dwa końce". W teorii grafów sentencja ta ma postać

Tw. („o uściskach dłoni")

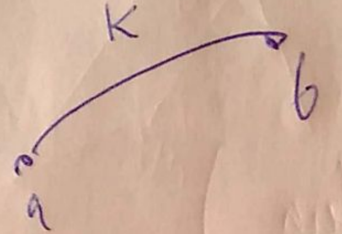
Dla każdego grafu G mamy:

$$\sum_{w \in W(G)} \deg(w) = 2\,|K(G)| . \quad (\#1)$$

Ponadto $\sum_{k \geq 0} k D_k(G) = 2\,|K(G)|$ (#2)

Dowód.

(#1): dla $k \in K(G)$: $\delta_G(k) = \{a, b\}$ $(a \neq b)$



W sumie $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ mamy wkład $\deg(a) + \deg(b)$ na jedną krawędź.

Jeśli $a = b$, to $\deg(a) = 2 \times \#$ pętli.

Zauw., że (#2) jest innym zapisem $\sum_{v \in \deg(V)} \deg(v)$.

P. 3. Weźmy graf z p. 2

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 6 \cdot 3 = 18$$

$$|K(G)| = 9$$

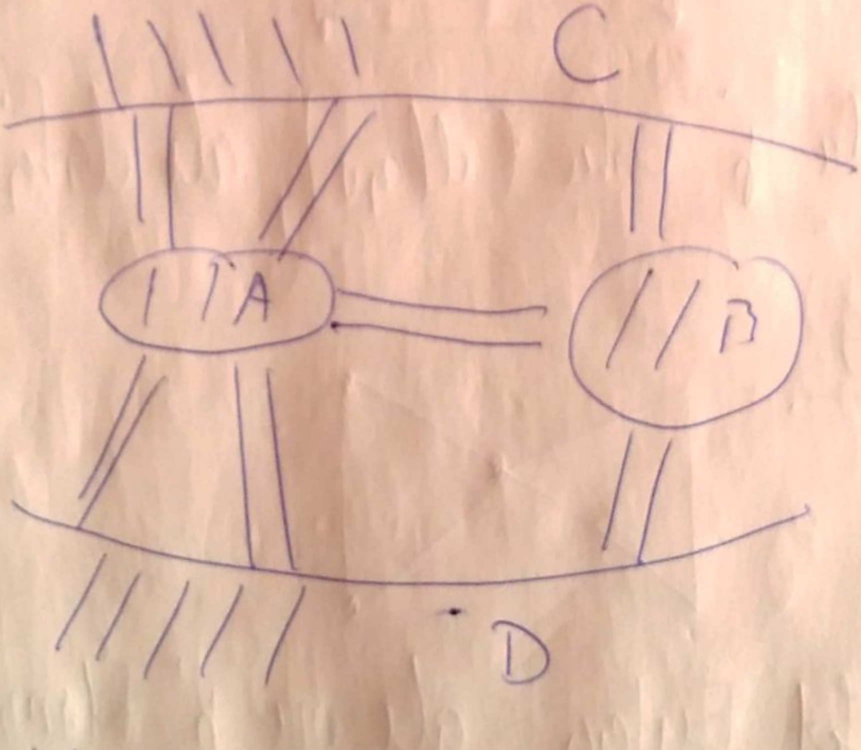
//

Po tych inf. wstępnych przystąpmy do omawiania tematu głównego.

Cykl, droga i graf Eulera.

Z historycznego punktu widzenia teoria grafów wzięła się z analizy następującego problemu — PROBLEM MOSTÓW KRÓLEWIECKICH.

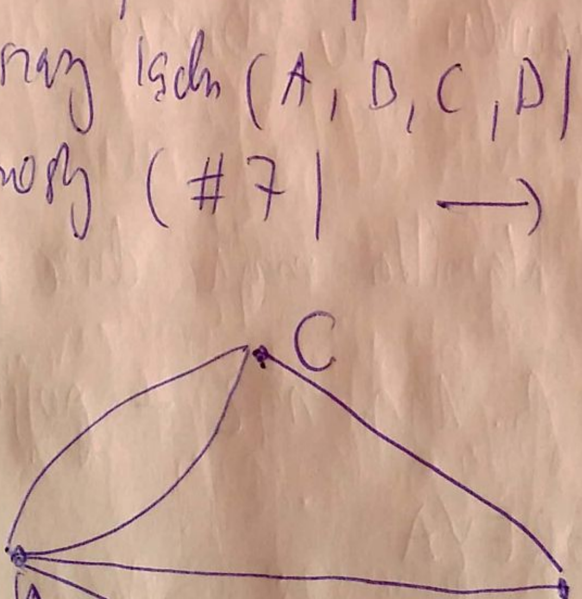
Przez miasto Królewiec przepływa rzeka PREGOŁA, w której rozwidleniach znajdują się 2 wyspy. Wyspy połączone ze sobą i brzegami rzeki mostami jak na rys. poniżej



Problem z jakim borykano się w XVIII (dotyczył mieszkańców Królewca) brzmiał.

„Czy można odbyć spacer po mieście wychodząc z danego miejsca (brzegi C, D, wyspy A, B) (DOM), przechodząc przez każdy most i tylko jeden raz i wrócić do DOMU?"

Problem ten rozwiązał w 1736 Leonhard Euler. Wykorzystał do tego celu graf ilustrujący topografię terenu i zjawisko wędrówki po mieście.
W grafie tym zinterpretował:
obszary lądu (A, B, C, D) → przez wierzchołki
mosty (#7) → za pomocą krawędzi.



„graf Eulera" G

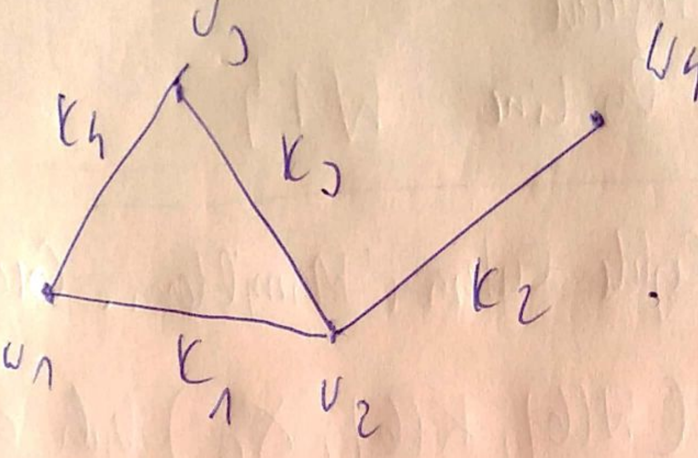
Natomiast oryginalny problem (*) przeformułowany na

(**) Czy w grafie G istnieje droga:
zamknięta, złożona ze wszystkich krawędzi,
i różnych (czyli proste)

Def. (cyklu Eulera).
Każdą drogę, która jest zamknięta, złożona ze wszystkich krawędzi i prostą nazywamy cyklem Eulera.

Uwaga. Drogę (niekoniecznie zamkniętą), ale prostą i złożoną ze wszystkich krawędzi grafu nazywamy drogą Eulera.
Czyli zamknięta droga Eulera = CYKL EULERA

(p.4)



(k_1, k_3, k_4) – jest cyklem, ale nie Eulera.

$k_1 \to k_2 \to k_2 \to k_3 \to k_4$

jest drogą zamkniętą złożoną ze wszystkich krawędzi, ale nie jest prostą (czyli nie jest Eulera).

Z definicji przyjmujemy, iż każdy graf zawierający cykl Eulera (czyli domkniętą drogę Eulera) nazywamy grafem Eulera.

Euler udowodnił następujące tw.

Tw (I tw. o grafie Eulera)

Jeśli G jest Eulera, to $\forall\, w \in W(G)$

$$2 \mid \deg(w).$$

WNIOSEK:

Problem „Mostów Królewca" nie ma rozw.

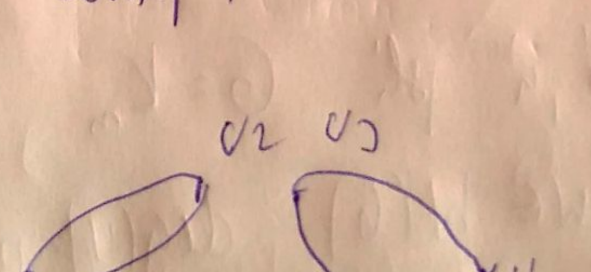
(np. $\deg(B) = 3$).

Uwaga:

Warunek $\forall_{w \in W(G)}\ 2 \mid \deg(v)$ jest tylko

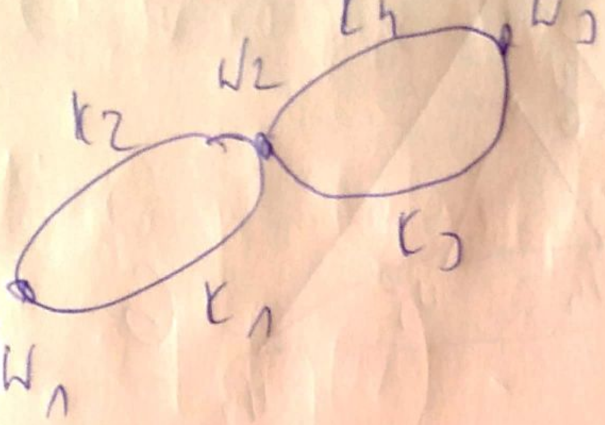
warunkiem koniecznym.

Pr



$\deg(v_i) = 2$, ale nie ma drogi zamkniętej złożonej ze wszystkich krawędzi.

P.6. Weźmy modyfikację grafu z P5



Oczywiście: (i) $2 \mid \deg(w_j)$, $j = 1,2,3$

(ii) $k_1 \to k_3 \to k_4 \to k_2$

jest prosta, zamknięta i wyczerpuje wszystkie krawędzie.

Zatem: G jest Eulera oraz

(i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Opiszmy sposób powstania tego grafu.

Powiemy, że G jest spójny, jeśli każde dwa wierzchołki łączy co najmniej jedna droga.

Mamy teraz

Tw2 (II tw. Eulera)

Niech G spójny. Wtedy

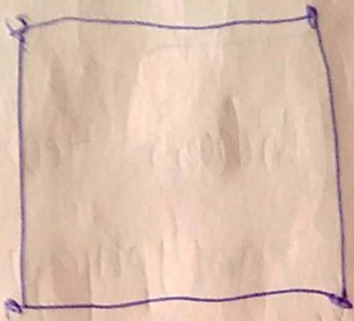
$$G \text{ jest Eulera} \iff \forall_{v \in V(G)} \; 2 \mid \deg(v).$$

Zad2. Analiza przykładu 5.2.2 [PR?].

Grafy Hamiltona.

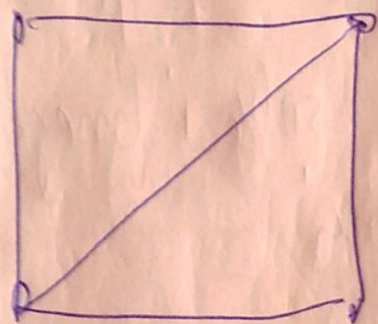
Każdą drogę w grafie G, która przechodzi tylko raz przez każdy wierzchołek grafu nazywamy drogą Hamiltona. Jeśli dodatkowo jest ona zamknięta, to nazywamy ją cyklem Hamiltona. Graf posiadający cykl Hamiltona nazywamy grafem Hamiltona.

P.7.



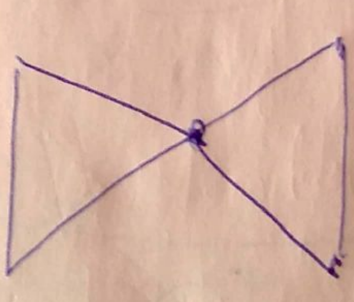
G je Eulerov i Hamiltonov.

P.8.



Nije Eulerov (dokaz), ali jeste Hamiltonov.

P.9.



Jest Eulerov, ali nije Hamiltonov (dokaz?)

Charakteryzacja grafów Hamiltona jest trudniejsza, aniżeli Eulera.

W 1950 r. P. Dirac udowodnił, że

Tw (Dirac) (5.3.1 [RR])

Niech G będzie prosty i $|W(G)| = n \geq 3$.

$$\forall_{w \in W(G)} \deg(w) \geq n/2 \Longrightarrow G \text{ jest Hamiltona}$$

Zad 3 (dla ambitnych)

Analiza dowodu Tw Diraca.

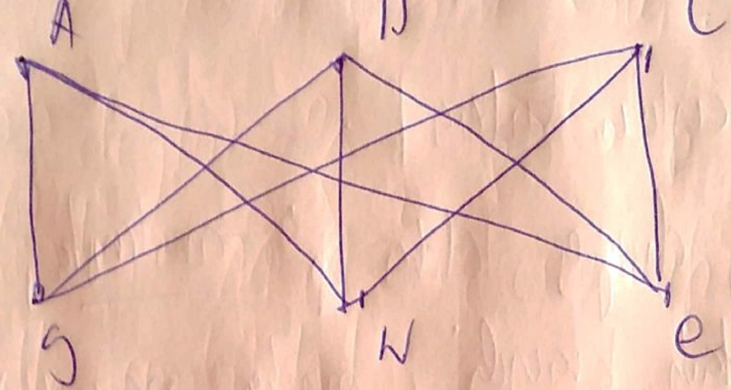
Uwaga. Grafy Hamiltona mają duże zastosowania w IT

Patrz. [RR] str. 191-192 – pojęcie

KODU GREYA.

G jest planarny, jeśli można go narysować na płaszczyźnie w ten sposób, że krawędzie nie przecinają się.
(Można udowodnić, że łuki krawędzi = odcinki)
tw. FARYEGO-WAGNERA 1936 r. (RR)).

P.10. (P.5.4.1)

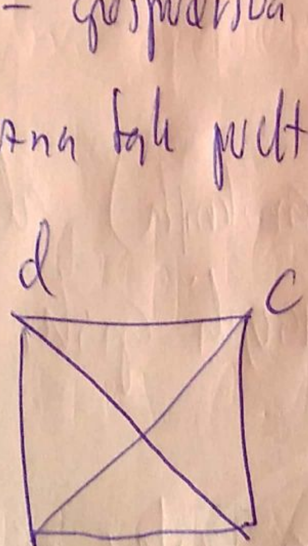


„NIE"

A, D, C – gospodarstwa, g, w, e – media.

Czy można tak podłączyć, aby media nie krzyżowały się!

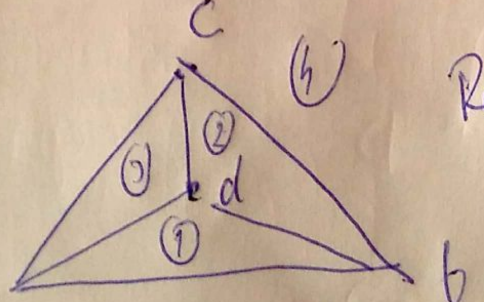
P.11.



graf K_4 (pełny)

„NIE"

P 12.



Reprezentacja planarna K_4 TAK

ZAD 4.

Udowodnić, że grafy z P.11, 12 są izomorficzne.

Problem grafów planarnych – wzór Eulera.

Weźmy graf z P.12, mamy tak:

$$|K(G)| = 6, \quad |W(G)| = 4,$$

$$|K(G)| - |W(G)| + 2 = 4$$

Zauważmy, że graf ten (jako reprezentacja planarna K_4) wyznacza 4 „regiony" oznaczone w P12 przez i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Euler udowodnił

Tw (wzór Eulera dla grafu planarnego) (5.4.1 [RR])

Dla k. grafu planarnego (≡ repr. planarnej)

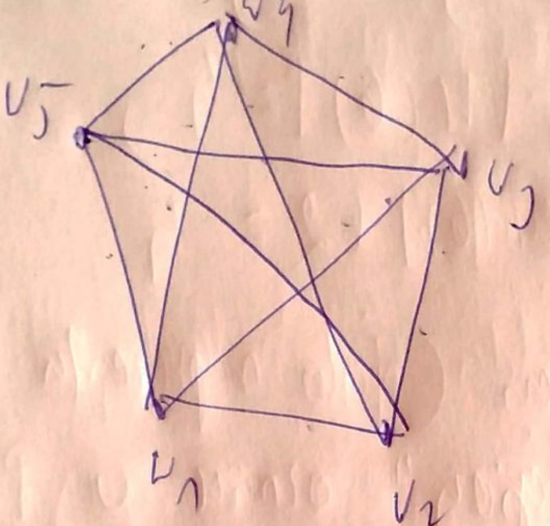
$$r = |K(G)| - |W(G)| + 2, \text{ gdzie}$$

$$r = \# \text{ regionów}.$$

Z tw. tego mamy wyprowadzić wniosek

$$\forall_{G \text{ planarnego}} \quad |K(G)| \leq 3|W(G)| - 6.$$

P.11. Weźmy graf K_5



Mamy $|W(G)| = 5$, $|K(G)| = 10$, zatem nie zachodzi

Zad 5. Wykaż, że K_1, K_2, K_3, K_4 są planarne.

Zad 6. Rozstrzygnąć problem z P.10.