Kurs MD - wykład

Egzam : wykład

tryb on-line

Wykład 3

Temat. Teoria zbiorów jako kolejna implementacja Algebry Boole'a (A B)

Wprowadzenie.

Jeśli na logikę matematyczną spojrzymy strukturalnie, o strukturze następującej:

$(\{0,1\}, 0, 1, \neg, \wedge \vee)$,

gdzie: (i) $\{0,1\}$ jest zbiorem

(ii) $0, 1$ dwa wyróżnione elementy tego zbioru

(iii) $\neg, \wedge, \vee$ działania na tym zbiorze (jedno i dwu-argumentowe)

(iv) $\wedge, \vee$ są przemienne i łączne

(v) $\wedge, \vee$ mają elementy neutralne

~~[illegible]~~

$p \vee 0 \equiv p$, $p \wedge 1 \equiv p$

(vi) $\vee, \wedge$ są rozdzielne względem siebie

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(1)

(vii) $\vee, \wedge$ mają własności „dopełnień"

$p \vee (\neg p) \equiv 1$ (tertium non datur)

$p \wedge (\neg p) \equiv 0$ (z. sprzeczności)

Struktura o takich własnościach nazywa się Algebrą Boole'a.

ZAD 1

Przeczytać Rozdział 6 KSIĄŻKI.

Pokażemy teraz kolejną implementację A. B. — teoriomnogościową. Zwróćmy do metody, która była przełomowa w historii matematyki — metody Cantora (p. XX w.), za pomocą predykatu.

Pojęcie zbioru.

Zbiór jest pojęciem pierwotnym w matematyce — nie wymaga definicji! Będę oznaczał dużą literą, np. $A, B, \ldots$

$a \in A$ będzie oznaczało, że zbiór A ma co najmniej jeden element a.

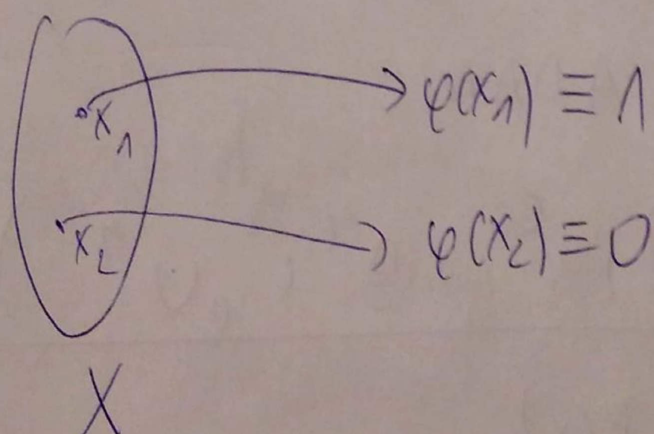
$B = \{b\}$ oznacza, że $b \in B$ i jest to jego jedyny element.

Zbiór nie mający żadnych elementów - taki zbiór oznaczamy $\emptyset$ - zbiór pusty.

Dalej będziemy relatywizować, tj. weźmy pewien zbiór $X \neq \emptyset$. Wszystko co dalej będziemy robili będzie dotyczyło tylko zbioru X.

Mając X, pokażmy jak można generować zbiory złożone z jego pewnych elementów.

Niech φ będzie formą zdaniową określoną na X.



rys. 1

Zatem może być tak jak na rys. 1.

Definicje

$\{x \in X : \varphi(x)\}$, co czytamy

„zbiór złożony z tych wszystkich elementów x zbioru X, dla których zdanie $\varphi(x)$ jest prawdziwe"

FAKT 1

Z każdym podzbiorem A zbioru X związana jest forma zdaniowa φ_A, dla której

$$A = \{x \in X : \varphi_A(x)\}$$

Przykład 1

$$\varphi_A(x) = 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Przykład 2

Niech φ będzie formą zdaniową, a więc

$$\forall_{x \in X} \ \varphi_0(x) \equiv 0.$$

Wtedy $\{x \in X : \varphi_0(x)\} = \emptyset$

Przykład 3.

Niech φ będzie formą zdaniową, że

$$\forall_{x \in X} \varphi_1(x) \equiv 1$$

Wtedy $\{x \in X : \varphi_1(x)\} = X$.

Relacja inkluzji.

Niech $A = \{x \in X : \varphi_A(x)\}$

$B = \{x \in X : \varphi_B(x)\}$

Powiemy, że

$$A \subseteq B \equiv \forall_{x \in X} \varphi_A(x) \Rightarrow \varphi_B(x)$$

FAKT 2.

1°. $\emptyset \subseteq X$

2°. dla każdej mnogości $A = \{x \in X : \varphi_A(x)\}$
$A \subseteq X$.

3°. Jeśli $\{a,b\} \subset X$, to w X istnieją mnogości, które nie są ze sobą w relacji $\subseteq$. $(\{a\}, \{b\})$.

$A \subseteq B$ będziemy mówili „A jest podzbiorem B"

$A \subsetneq B \equiv A \subseteq B$ i $A \neq B$

Definiujemy nowy zbiór:

$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ – zbiór, którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru X.

Dalej taki zbiór nazywamy RODZINĄ, a $\mathcal{P}(X)$ – rodziną potęgową.

Mamy fundament przyrody Algebry Boole'a – $P(X)$, oraz dwa jego wyróżnione elementy: $\emptyset$, X.

Czas na działania

(#) jednoargumentowe.

Niech $A \in P(X)$, czyli

$$A = \{x \in X : \varphi_A(x)\}.$$

Bierzemy zbiór $\{x \in X : \neg \varphi_A(x)\}$

Dalej oznaczamy go przez A^c (complement = dopełnienie)

Zauważmy, że:

(∘) $\forall_{x \in X}$ zdanie „$x \in A$" $\vee$ „$x \in A^c$" jest tautologią.

(∘∘) $\forall_{x \in X}$ zdanie „$x \in A$" $\wedge$ „$x \in A^c$" jest sprzeczne.

(∘∘∘) $\forall_{A \in P(X)} \quad (A^c)^c = A$

(∘∘∘∘) $\emptyset^c = X, \quad X^c = \emptyset$

(#) dwuargumentowe.

Niech $A, B \in P(X)$, czyli

$A = \{x \in X : \varphi_A(x)\}, \quad B = \{x \in X : \varphi_B(x)\}$

Definiujemy $\varphi_C \overset{df}{=} \varphi_A \vee \varphi_B$, czyli

$\forall_{x \in X} \quad \varphi_C(x) = \varphi_A(x) \vee \varphi_B(x)$,

oraz $C = \{x \in X : \varphi_C(x)\}$.

~~Wtedy~~

Wtedy. Piszemy $C = A \cup B$,

oraz „$\cup$" nazywamy sumą mnogościową.

FAKT („$\cup$")

1) $\cup$ jest przemienna, łączna

2) $\forall_{A \in P(X)} \; A \cup \emptyset = A$

3) $\forall_{A \in P(X)} \; A \cup A^c = X$

Dowód. ZADANE.

Podobnie, dla φ_A, φ_B (jak wyżej), niech

$$\varphi_D \stackrel{df}{=} \varphi_A \wedge \varphi_B \,, \text{ gdzie}$$

$$\varphi_D(x) = \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(x) \,,$$

oraz $D = \{x \in X : \varphi_D(x)\}$.

Piszemy $D = A \cap B$, oraz „$\cap$" iloczyn mnogościowy

FAKT ($\emptyset$ „$\cap$")

1) $\cap$ jest przemienny, łączny

2) $\forall_{A \in P(X)} \; A \cap X = A$

3) $\forall_{A \in P(X)} \; A \cap A^c = \emptyset$

<u>Dowód</u>. ZADANIE.

<u>FAKT ($\emptyset$, „$\cap$" i „$\cup$")</u>

$$\forall_{A,B,C \in P(X)} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

<u>Dowody</u> ZADANIE

<u>FAKT ($\emptyset$, „^{c}", „$\cap$" i „$\cup$")</u>

$\forall A, B \in P(X)$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

WNIOSEK

Struktura

$(\mathcal{P}(X), \emptyset, X, {}^{c}, \cap, \cup)$ jest A.B.

Mamy następującą analogię:

	Logika	T. mnogości
wartość l. / zbiór	1	φ_A
negacja / dop.	$\neg$	c
alternatywa / suma	$\vee$	$\cup$
koniunkcja / iloczyn	$\wedge$	$\cap$
wynikanie / inkluzja	$\Rightarrow$	$\subseteq$
równoważność / =	$\equiv$	$=$
elementy wyróżn.	$0, 1$	$\emptyset, X$
struktura	A.B.	A.B.

Przegląd wybranych zbiorów – zbiory liczbowe.

W tym kursie najczęściej zbiór liczb (odpowiednik X)

oznaczamy przez $\mathbb{R}$ – zb. liczb rzeczywistych

Wtedy dla $r \in \mathbb{R}$, r – liczba rzeczywista.

$\mathbb{R}$ ~~do~~ opisujemy w arytmetyce, opartej na działaniu „+" i własności dwóch liczb: 0 oraz 1.

Niech formy zdaniowej $\varphi_{\mathbb{N}}$, gdzie

1^o. $\varphi_{\mathbb{N}}(1) \equiv$ prawda

2^o. $\forall_{r \in \mathbb{R}} \; \varphi(r) \Rightarrow \varphi(r+1)$

oraz zbiór

$$\mathbb{N} = \{ r \in \mathbb{R} : \varphi_{\mathbb{N}}(r) \}.$$

ZAUWAŻMY, że

1^o. $1 \in \mathbb{N}$

2^o. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ nazywamy zbiorem liczb całkowitych dodatnich
albo zbiorem liczb naturalnych.)

ZADANIE

Udowodnić, że $5 \in \mathbb{N}$.

ZADANIE.

Udowodnić, że $\mathbb{N}$ nie jest zbiorem skończonym.

Podstawowe tw. związane ze zbiorem $\mathbb{N}$
— ZASADA INDUKCJI MATEM. (ZIM)

Niech T będzie formą zdaniową określoną na podzbiorze $\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$.

Wtedy, jeśli

1^0. $T(n_0)$

2^0. $\forall_{k \geq n_0} \left(T(k) \Rightarrow T(k+1) \right)$,

$$\forall_{n \geq n_0} T(n) \; .$$

Zadanie

Metodą ZIM udowodnić, że
$$\forall_{n \geq 2} \; 1+2+\ldots+n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

ZADANIE

Przeczytać P.2.3.1 (książka)

P.2.3.2

ZADANIE Ćw. 2.5.11 i 2.5.12

Na kolejnym wykładzie!

- zbiory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
- rachunek zbiorów
- iloczyn kartezjański zbiorów
- rodziny zbiorów