Kurs: Matematyka Dyskretna

Forma zajęć: Wykład

Tryb: On-line

Temat. Zbiory liczbowe $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; rachunek zdań, iloczyn kartezjański, rodziny zbiorów.

Wiemy, że zbiór $\mathbb{N}$ – liczb naturalnych zdefiniowany jest metodą ZIM w sposób następujący

$$(1 \in \mathbb{N}) \wedge \forall_{n \geq 1} (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N})$$

Z def. tej wynika, że $\mathbb{N}$ nie jest zbiorem skończonym oraz liczba 1 jest pierwszą liczbą tego zbioru.

Z definicji przez $-\mathbb{N}$ oznaczamy wszystkie liczby przeciwne do $n \in \mathbb{N}$.

Wtedy $\mathbb{Z} \overset{df}{=} -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\mathbb{N}\}$

nazywamy zbiorem liczb całkowitych.

Zauważmy, że jeśli $\mathbb{Z}_+$ – l. całkowite dodatnie, to $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$

<u>Fakt 1</u> (podstawowa własność $\mathbb{Z}$ — zasada podzielności)

$$\forall_{n,m \in \mathbb{N}} \ \exists_{w \in \mathbb{Z}_0,\ r \in \{0,1,\dots,m-1\}} \quad n = mw + r.$$

($\mathbb{Z}_0$ - całk. nieujemne)

Co więcej, rozkład $n = mw + r$ jest <u>jedyny</u>.

r nazywamy <u>resztą z dzielenia</u> n przez w.

Jeśli $r = 0$, to mówimy, że <u>m dzieli n, co zapisujemy</u> $m \mid n$.

Będziemy też pisać $\frac{n}{m} = w + \frac{r}{m}$

<u>Dowód</u>. Przeczytać (str. 38 [RR]).

<u>Zad 1</u>. Sformułować ZP dla $\mathbb{Z}$.

Pamiętamy, że $q \in \mathbb{Q}^+$ - zb. l. <u>wymiernych dodatnich</u>, jeśli $q = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$,

Dzieląc n, m przez największy wspólny dzielnik możemy dalej założyć, że n, m <u>są względnie pierwsze</u>.

Niech $-\mathbb{Q}^+$ – liczby przeciwne do $\mathbb{Q}^+$.

Wtedy $\mathbb{Q} = -\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.

<u>Fakt 2</u>.

$$\forall_{q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}} \ \exists!_{\substack{q' \in \mathbb{Q}^+ \\ 0 < q' < 1}} \ q = n + q'$$

dla pewnej $n \in \mathbb{N}$.

Oznacza to, że cała informacja na temat liczb wymiernych ($\notin \mathbb{Z}$) pochodzi z własności l. wymiernych <u>ułamkowych</u> (z $(0,1)$).

<u>Zad 2</u>. Udowodnić Fakt 2.

Weźmy teraz $q = \frac{n}{m}$, $0 < n < m$

Ponieważ $q = \frac{n}{m} = \frac{1}{\frac{m}{n}}$, z zasady podzielności dostaję: $m = q_1 n + r_1$, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le r_1 < n$ całk. (przeczytać str. 43 [RRJ]).

Dlatego $$q = \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{n}} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{n}{r_1}}},$$ o ile $r_1 > 0$.

Powtarzając procedurę otrzymujemy

$$n = a_2 r_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1,$$ co daje

$$q = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}}}}$$

Ponieważ $0 \leq r_2 < r_1$ i są to l. całkowite, procedura ta musi zakończyć się po skończonej ilości kroków!

W efekcie otrzymujemy:

$$q = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots \frac{1}{a_n + \frac{1}{b}}}}$$

dla p. l. naturalnej b.

Takie przedstawienie nazywamy skończonym ułamkiem łańcuchowym.

Zad 3 (P.2.3.4)

Twierdzenie 1 (o reprezentacji $\mathbb{Q}$)

Każda l. $q \in \mathbb{Q}$ ma swoją jednoznaczną reprezentację przez skończony ułamek łańcuchowy, czyli

$$q = c + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{b}}}},$$

$c \in \mathbb{Z}$

$b \in \mathbb{Z}$

Dowód. Pominięty (str. 40)

Drugi sposób reprezentacji $\mathbb{Q}$

Niech $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, .., 9\}$ – alfabet

Dla $a_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2.., k$, weźmy

wyraz $\quad w = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1$

Przyporządkujmy mu wartość liczbową

$$W \longrightarrow q \in \mathbb{Q}, \text{ gdzie}$$

$$q = a_1 10^0 + a_2 10^1 + a_3 10^2 + \ldots + a_k 10^{k-1}$$
$$= \sum_{j=1}^{k} a_j 10^{j-1}$$

Jasne jest, że $q \in \mathbb{Z}_0$. Łatwo rozszerzyć to przyporządkowanie na całe $\mathbb{Z}$

$$q \longrightarrow -q$$

A teraz na odwrót, bierzemy $n \in \mathbb{Z}_+$ i reprezentujemy je za pomocą wyrazu W. (przeczytać str. 41 [RR])

Stąd reprezentację przez wyrazy mamy zapewnioną dla $\mathbb{Z}$.

Niestety rozszerzenie jej na całe $\mathbb{Q}$ (str. 41[RR])

Zad 4 (P.2.2.5, P.2.2.6).

Daje to nam twierdz.

Tw. 2 (o reprezentacji dziesiętnej $\mathbb{Q}$).

Każdy $q \in \mathbb{Q}$ można jednoznacznie wyrazić w postaci dziesiętnej albo skończonej

$$c, q_k q_{k-1} \dots q_2 q_1$$

albo dziesiętnej nieskończonej, ale okresowej

$$c, q_k q_{k-1} \dots q_2 q_1 (o_r o_{r-1} \dots o_1),$$

gdzie podciąg $o_r o_{r-1} \dots o_1$ oznacza tę część reprezentacji, która powtarza się (np. $1/3 = 0,3(3)$).

Wreszcie, ponieważ liczba r, taka, że $r^2 = 2$ nie należy do $\mathbb{Q}$ (udowodnić to!), ~~ist~~ zbiór $\mathbb{Q}^c \neq \emptyset$. Z def.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \dot{\cup} \mathbb{Q}^c$$

Uwagi n/t rachunku zbiorów.

Na wykładzie z podobnych tabel, w których pokazaliśmy związki między operatorami logicznymi, a mnogościowymi.

Dlatego np. mamy:

$$\forall_{p \in \mathcal{L}} \ \neg(\neg p) \equiv p \qquad \forall_{A \in P(X)} \ (A^c)^c = A$$

$$\forall_{p \in \mathcal{L}} \ p \vee (\neg p) \equiv 1 \qquad \forall_{A \in P(X)} \ A \cup A^c = X$$

$$\forall_{p,q \in \mathcal{L}} \ \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \qquad \forall_{A,B \in P(X)} \ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

itd.

Oznacza to, iż rachunek zbiorów jest pewnym rachunkiem zdań.

Szczegóły i przykłady na ćw.!

Iloczyn kartezjański (produkty)

Jest to ważna operacja mnogościowa wykorzystywana w IT.

Ustalmy zbiór $X \neq \emptyset$ i wybierzmy z niego dwa elementy $x, y \in X$ (też może $x = y$).

Mówimy, że elementy x, y uporządkowaliśmy, jeśli liczbie $1 \to x$, $2 \to y$, (albo $1 \to y$, $2 \to x$),

co zapisujemy (x, y) ((y, x))

para uporządkowana

poprzednik następnik

Zatem $(x, y) = (x', y') \equiv x = x' \wedge y = y'$

Zbiór wszystkich takich par oznaczamy przez $X \times X$ lub X^2.

Niech teraz $A, B \subset X$

Wtedy $\{(x,y) \in X \times X : \underbrace{(x \in A) \wedge (y \in B)}_{= P(x,y)}\}$

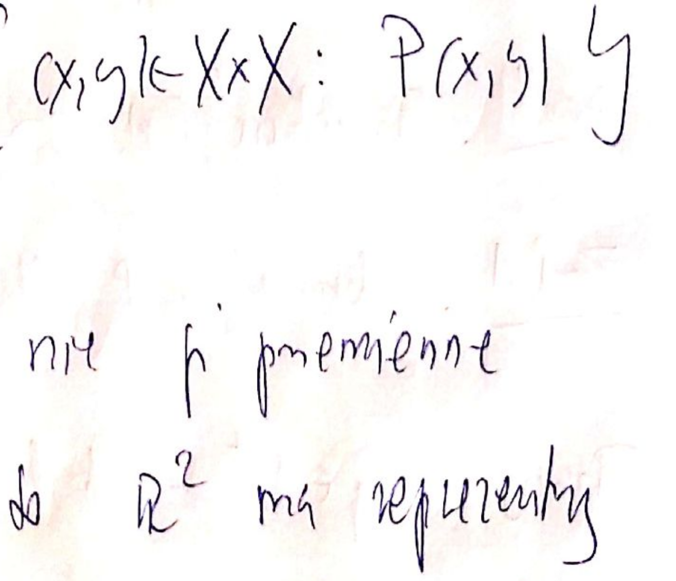
jest podzbiorem zbioru X^2. Oznaczmy go $A \times B$.

Zatem
$$A \times B = \{(x,y) \in X \times X : P(x,y)\}.$$

<u>Uwaga.</u>

1°. Działanie „$\times$" nie jest przemienne

2°. Jeśli $X = \mathbb{R}$, to $\mathbb{R}^2$ ma reprezentację w postaci <u>płaszczyzny</u>



Zad. (p 2.2.5).

Weźmy teraz $X^2 \times X = (X \times X) \times X$

Weźmy dowolny $((x,y),z) \in X^2 \times X$

$$\updownarrow$$

$$(x,(y,z)) \in X \times X^2$$

Dlatego będę pisać (x,y,z) – „trójka uporządkowana".

Zatem $X \times X \times X = X^2 \times X = X \times X^2$

$$\| $$

$$X^3$$

Dlatego $A, B, C \subset X$

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

I ogólnie ($n \geq 2$)

$$X^n = \underbrace{(X \times X \times \ldots \times X)}_{n-1} \times X$$

Jeśli teraz $A_j \subset X$, $j = 1, 2 \ldots n$,

to $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{1 \le j \le n} A_j$

Ważnym przykładem jest $X = \mathbb{R}$, i wtedy

$\mathbb{R}^n$ – n-wymiarowa przestrzeń Euklidesa

Wtedy element $\mathbb{R}^n$ oznaczamy $\bar{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$

i nazywamy CIĄGIEM (długości n).

Uwagi n/t rodzin zbiorów.

Jeśli $X \neq \emptyset$, to mamy

$A \subset X$, A - podzbiór (X)

$a \in A$, a - element zb. A.

Ale, możemy wziąć zbiór zbiorów z A, czyli $\{A\}$.

wtedy $A \in \{A\}$.

I ogólnie, niech $\mathcal{A}$ oznacza zbiór, którego elementami są pewne podzbiory X.

Zatem, albo taki zbiór jest pusty, $\mathcal{A} = \emptyset$, albo $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

$\mathcal{A}$ nazywamy rodziną (podzbiorów) zb. X.

Przez $\mathcal{P}(X)$ oznaczmy tzw. zbiór potęgowy, czyli $\forall_{A} \left[A \in \mathcal{P}(X) \iff A \subset X \right]$.

FAKT.

Niech X będzie zbiorem skończonym, o n-elem., co będziemy zapisywali $|X| = n$.

Wtedy
$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}.$$

Stąd nazwa zbiór potęgowy.

Dowód. Przeczytać P.2.4.3 [RR] (str. 55).

Na kolejnym wykładzie podamy kilka przykładów ważnych w MD zbiorów.