Kurs: Matematyka Dyskretna

Forma zajęć: Wykład

Tryb: On-line

W5.

Temat. Rodziny zbiorów c.d. Wprowadzenie do teorii RELACJI

Ustalmy $X \neq \emptyset$ oraz weźmy rodzinę $\mathcal{P}(X)$ – potęgowa.

Wiemy, że wtedy

$$A \in \mathcal{P}(X) \iff A \subset X$$

Zjawisko indeksowania i rodziny przeliczalne

Niech $\mathcal{A}$ będzie podrodziną $\mathcal{P}(X)$ czyli

$$\forall_{A \subset X} \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{P}(X).$$

Dalej załóżmy, że $\mathcal{A} \neq \emptyset$

FAKT (o indeksowaniu)

Dla każdej niepustej rodziny $\mathcal{A}$ istnieje co najmniej jeden zbiór T, że

$\mathcal{A} = \{A_t \subset X;\ t \in T\}$

Mówimy wtedy, że $\mathcal{A}$ została „poindeksowana" zbiorem indeksów T.

Uwagi:

1° $\forall_{t,t' \in T}\quad t \neq t' \Rightarrow A_t \neq A_{t'}$

2° Niech $\mathcal{A} = \{A, B\}$, $A, B \subset X$.

Definiujemy: $A_1 \stackrel{df}{=} A$, $A_2 \stackrel{df}{=} B$ i wtedy

$\mathcal{A} = \{A_1, A_2\} = \{A_j;\ j \in \{1,2\}\}$.

3° Jeśli $T \subset \mathbb{N}$, to mówimy, że $\mathcal{A}$ jest przeliczalna (w szczególności skończona).

Przykład 1

$|X| = n$, to $P(X)$ jest skończona, bowiem

$$|P(X)| = 2^{|X|} = 2^n$$

Operacje mnogościowe na elementach rodziny

Niech $\mathcal{A} = \{A_t,\ t \in T\} \subset \mathcal{P}(X)$.

Wtedy $\bigcup \mathcal{A} \stackrel{df}{=} \bigcup_{t \in T} A_t \subset X$ oznacza

sumę mnogościową wszystkich elementów $\mathcal{A}$.

Np. $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$, to

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{j \in \{1,2\}} A_j = A_1 \cup A_2,$$ zatem

symbol „$\bigcup$” jest uogólnieniem „$\cup$”

Podobnie

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{t \in T} A_t \subset X$$ oznacza

iloczyn mnogościowy wszystkich elementów $\mathcal{A}$.

Np. $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{j \in \{1,2,3\}} A_j = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Dlatego mamy uogólnione postaci praw de Morgana

$$\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)^c = \bigcap_{t\in T} A_t^c$$

Przykłady wybranych rodzin (CRRJ str. 48 – 51)

1) Partycja ~~[illegible]~~ X.

Mówimy, że rodzina $P \subset P(X)$ jest partycją zb. X, jeśli (i) $P = \{A_t,\ t\in T\}$

(ii) $\forall_{t,t'\in T}\ t\neq t' \Rightarrow A_t\cap A_{t'}=\emptyset$

(iii) $\bigcup P = X$

Wtedy A_t nazywamy ATOMEM P, a (iii) rozbiciem X na atomy.

Przykład

$X=\mathbb{N}$, $A_1=\{n\in\mathbb{N} : 2\mid n\}$

$A_2=\{n\in\mathbb{N} : 2\nmid n\}$

$\{A_1, A_2\}$

2) <u>Ideał</u>

rodzinę $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy <u>ideałem</u>, jeśli

(i) $\forall_{\substack{A\in\mathcal{I} \\ B\subset X}} \quad B\subset A \Rightarrow B\in\mathcal{I}$ (dziedziczenie)

(ii) $\forall_{A,B\in\mathcal{I}} \quad A\cup B\in\mathcal{I}$

<u>ZAD 1</u> Niech $\mathcal{A}$ rodzina wszystkich przedziałów z $\mathbb{R}$. Czy $\mathcal{A}$ jest ideałem?

<u>ZAD 2</u>. Niech $\mathcal{A}$ rodzina wszystkich skończonych podzbiorów X. Czy $\mathcal{A}$ jest ideałem?

3) <u>FILTR</u>

rodzinę $\mathcal{F}$ nazywamy <u>filtrem</u>, jeśli

(i) $\forall_{A\in\mathcal{F}} \forall_{B\subset X} \quad A\subset B \Rightarrow B\in\mathcal{F}$

(ii) $\forall_{A,B\in\mathcal{F}} \quad A\cap B\in\mathcal{F}$.

Zad 3.

Jeśli $\mathcal{A} \subset P(X)$, to

$$A \in \mathcal{A}^c \iff A^c \in \mathcal{A}$$

Udowodnić, że $\mathcal{A}$ jest ideałem $\iff$ $\mathcal{A}^c$ jest filtrem
(filtrem) (ideałem).

Zad 4. Proszę podać przykład filtru.

4) ALGEBRA ZBIORÓW

Rodzina $\mathcal{A} \subset P(X)$ jest algebrą (= ciałem), jeśli

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall_{A} \; A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall_{A, B \in \mathcal{A}} \; A \cup B \in \mathcal{A}$

ZAD 5. Niech $\mathcal{A}$ ciało. Udowodnić, że

(a) $X \in \mathcal{A}$, (b) $\forall_{A, B \in \mathcal{A}} \; A \cap B \in \mathcal{A}$

ZAD 6. Czy każdy ideał jest ciałem? Jeśli nie, to kiedy jest?

5) σ-Algebra (σ-ciało).

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ jest σ-algebrą (σ-ciałem) jeśli jest ciałem, oraz

$$\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Przykłady: $\mathcal{P}(X)$, $\{\emptyset, X\}$ σ-ciała.

Wprowadzenie do teorii RELACJI

Przeczytać [RR] P. 3.1.1, 3.1.2

Niech $X \neq \emptyset$ ustalony.

Def. (relacji)

Przez relację R dwuargumentową określoną na zbiorze X rozumiemy każdy podzbiór $X \times X$, czyli

$$R \subset X \times X.$$

Dalej będziemy zakładali, że $R \neq \emptyset$.

Jeśli $(a,b) \in R$, dla $a, b \in X$, to będziemy mówili, że „a jest w relacji R z b" i będziemy też pisali aRb.

ZATEM $(a,b) \in R \iff aRb$

Z tego powodu mówimy, że R jest 2-argumentowa.

I ogólniej:

niech $A, B \subset X$ niepuste.

Jeśli $R \subset A \times B$, to mówimy, że relacja R określona jest na A o wartościach w zbiorze B.

Piszemy wtedy

$$aRb \iff (a,b) \in R \iff b = R(a),$$

oraz $R: A \longrightarrow B$ $\left(A \xrightarrow{R} B\right)$,

gdzie $R \ni a \longrightarrow b = R(a) \in B$.

W szczególności, gdy $A = B$, to mówimy, że R określona jest na A.

Przykład 1

Niech $\emptyset \neq A \subset X$

Definiujemy $R \subset A \times A$

$$\forall_{a,b \in A} \quad (a,b) \in R \iff a = b$$

Przykład 2.

Niech f oznacza funkcję rzeczywistą, gdzie

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D_f \subset \mathbb{R}$$

Wtedy mamy przyporządkowanie:

$$\forall_{x \in D_f} \quad x \longrightarrow y = f(x) \in \mathbb{R}$$

argument

i takie y jest jedyne (!)

Definiujemy R_f:

$$(x,y) \in R_f \iff y = f(x).$$

Zatem f jest relacją.

ZAD 1.

Czy każda relacja jest funkcją?

P.3.

Dla $X = \mathbb{R}$, definiuję $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad xRy \iff x \leq y$$

P.4 Dla $P(X)$ definiuję $R \subset P(X) \times P(X)$

$$\forall_{A,B \subset X} \quad ARB \iff A \subset B$$

„zawieranie"

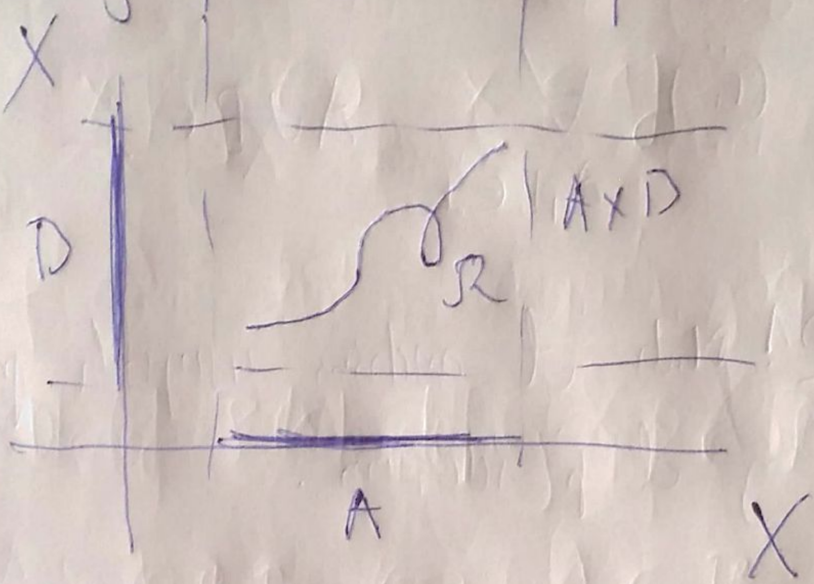
Zad 2. [RR] P. 3.1.7.

Ilustracja geometryczna relacji 2-arg.

Niech $A, B \subset X$, oraz

$$A \xrightarrow{R} B$$

Wtedy możemy ją zilustrować jak na rys.



Relacja n-argumentowa.

Niech teraz $n \geq 3$ oraz dla X weźmy złożenie

$$\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n\text{-razy}} = X^n$$

Więc, iż $X^n = X^{n-1} \times X$, dlatego jeśli R jest podzbiorem X^n, to

R jest relacją 2-argumentową, bowiem

$$R \subset X^{n-1} \times X, \text{ gdzie}$$

$$((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n) \in R \equiv$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \, R \, x_n$$

Ale wtedy $((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ dlatego mówimy, że R jest (<u>też</u>) relacją n-argumentową.

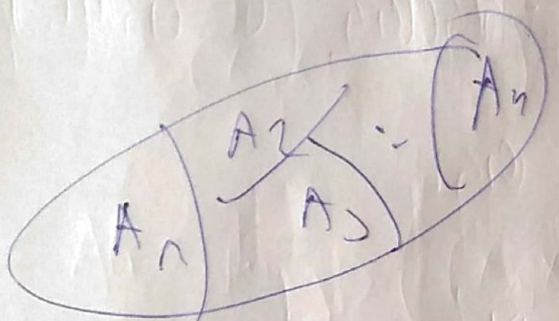
<u>Przykład</u> [RR] p. 3.1.8

<u>Zad 3</u>: Podać przykład relacji 3-argumentowej.

Przykład. (Dalej będzie on ważny!)

Dla X weźmy skończony podział

$$P = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \text{ zbioru } X.$$



Na X def. relację $R \subset X \times X$

$$\forall_{a,b \in X} \; aRb \iff \exists_{j \in \{1,\ldots,n\}} \; a,b \in A_j.$$

Udowodnić, że dla R mamy:

1) $\forall_{a \in X} \; aRa$

2) $\forall_{a,b \in X} \; aRb \Rightarrow bRa$

3) $\forall_{a,b,c \in X} \; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$