Kurs MD – wykład

Forma – wykład

tryb ON-LINE

W6

Temat. Metody reprezentacji relacji. ~~[illegible]~~

Będziemy zakładali, że $R \subset A \times A$, $A \subset X$ oraz R określona jest na całym zb. A, gdzie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Oznacza to, że

$$(*) \quad R = \{(a_j, a_{n_j}),\ j = 1, 2, \dots, n\}, \text{ gdzie}$$

$n_j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j = 1, 2, \dots, n$

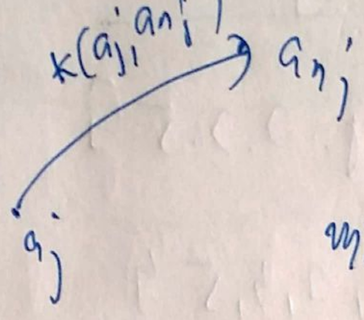
Przyjmiemy następującą interpretację:

$\forall_{1 \le j \le n}$ mamy co najmniej jedną parę uporządkowaną (a_j, a_{n_j}). Elementy a_j, a_{n_j} nazwiemy WIERZCHOŁKAMI, dokładniej

a_j – początkowym wierzchołkiem

a_{n_j} – końcowym wierzchołkiem

Fakt, że $a_j R a_{n_j}$ przetwarzamy na KRAWĘDŹ $k(a_j, a_{n_j})$ o początku a_j, końcu a_{n_j},



rys. 1

co graficznie przedstawiamy jak na rys. 1.

Pozwala to nam przetworzyć R daną (*) na:

(i) zbiór wierzchołków W, gdzie $W = A$

(ii) zbiór krawędzi K

$$K = \{ k(a_j, a_{n_j}),\ j = 1, 2 \ldots n \}$$

(iii) funkcję $g : K \longrightarrow W \times W$,

gdzie

$$g(k(a_j, a_{n_j})) = (a_j, a_{n_j}),\ j = 1, 2 \ldots n$$

Zdefiniujmy obiekt $G_R = (W, K, g)$ nazywamy GRAFEM SKIEROWANYM odpowiadającym relacji R i oznaczamy go G_R.

Mamy zatem reprezentację:

$$R \longrightarrow G_R$$

Na odwrót, niech G będzie skończonym (czyli W jest skończony) grafem skierowanym, czyli

$$G = (W_G, K_G, g_G), \text{ gdzie}$$

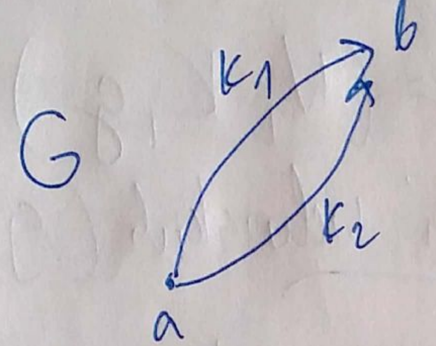
$$K_G \ni k \longrightarrow g_G(k) = (p, q), \quad p, q \in W$$

Zauważmy, że prowadzi to do naszej zdefiniowanej relacji R_G na $A = W_G$, zwanej relacją SĄSIEDZTWA, czyli $R_G \subset A \times A$, gdzie

$$\forall_{(a,b) \in A \times A} \; a R_G b \iff \exists_{k \in K_G} \; g(k) = (a, b).$$

Uwaga.

Weźmy graf skierowany jak na rys 2.



rys. 2

Zauważmy, że $g(k_1) = g(k_2) = (a, b)$.

Jeśli G reprezentuje R, czyli $G = G_R$, to taka sytuacja <u>nie pojawi się</u>. Mówimy, że G_R jest grafem bez <u>krawędzi WIELORAKICH</u>.

Dlatego powyższe uwagi oznaczają

<u>FAKT</u> (o reprezentacji R przez graf skierowany).

Pomiędzy zbiorem relacji 2-arg. zadanych na zbiorze skończonym, a zbiorem wszystkich grafów skończonych, skierowanych o niewielorakich krawędziach zachodzi odpowiedniość przedstawiona wyżej.

Uwaga.

Każdy graf skierowany, o którym mowa wyżej, można utożsamić z jego RYSUNKIEM.

POWSTAJE ON NA PŁASZCZYŹNIE i rysujemy go tak aby krawędzie nie przecinały się.

Dalej zobaczymy, że dany graf może mieć wiele takich ilustracji.

P.1 (CRRJ P.3.3.1)

Dla $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

niech $R \subset A \times A$, gdzie

$$R = \{(1,1), (1,5), (2,1), (4,3), (3,3), (4,1), (4,2), (5,5)\}$$

Podajmy jego reprezentację G_R.

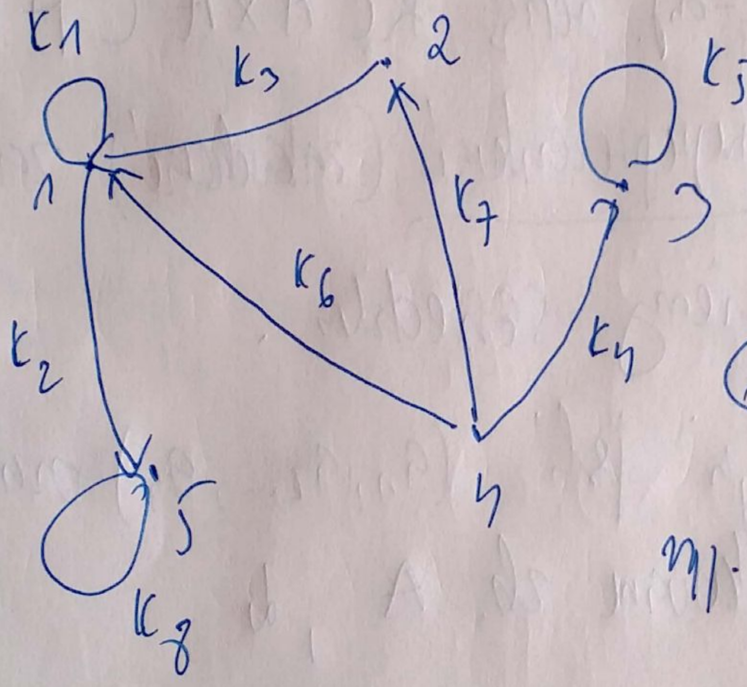
$W \overset{df}{=} A$,

$K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8\}$,

gdzie $g(k_1) = (1,1)$

$g(k_2) = (1,5)$ itd.

<u>Przykład rysunku</u>.



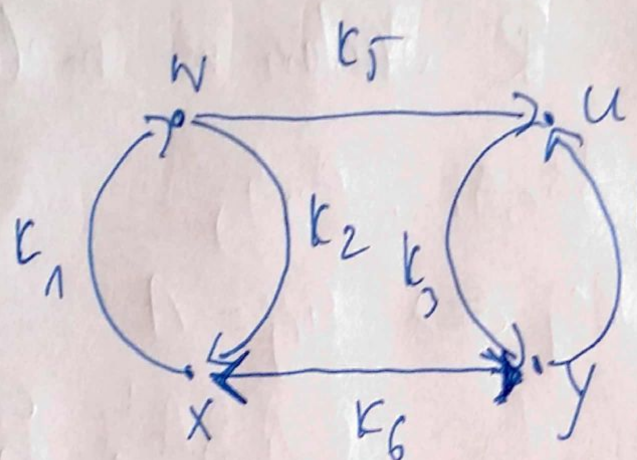
G_R

rys. 7.

Zwróćmy uwagę na krawędzie: k_1, k_5, k_8.
Nazywamy je PĘTLAMI (rysujemy je bez „>")

P.2.

Weźmy teraz graf G (skierowany, skończony) podany rysunkiem 4



rys. 4.

Mamy $G=(W, K, g)$, gdzie

$W=\{w, x, u, y\}$

$K=\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$, czyli

$g(k_1)=(x,w)$, $g(k_2)=(w,x)$ itd.

Zauważ, że G koduje relację $R_G \subset A \times A$,

gdzie $R=\{(x,w), (w,x), (y,x), (w,u), (u,y), (y,u)\}$.

Ponieważ relacja jest przykładem zbioru, na relacjach można wykonywać działania mnogościowe: suma, iloczyn, różnica

~~Obs~~

Problem 1 Co można wtedy powiedzieć o ich reprezentacji za pomocą grafu.

[p. [RR], str. 65–66]

SUPERPOZYCJA (SKŁADANIE) RELACJI

Niech dane będą 2-relacje

$$R_1 \subset A_1 \times D_1, \quad R_2 \subset A_2 \times D_2$$

Powiemy, że R jest złożeniem relacji R_1 i R_2, co zapiszemy $R = R_2 \circ R_1$, jeśli

$$\forall_{(a,b) \in A_1 \times D_2} \; aRb \Leftrightarrow \exists_{b_1 \in D_1} \; aR_1b_1 \wedge b_1R_2b.$$

Zauważ, iż z def. składania wynika, iż

$$B_1 \subset A_2 \text{ oraz } R \subset A_1 \times D_2.$$

Wyjaśnimy to na przykładzie

P3 [[RR] p. 3.3.5]

Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$R_1 = R_2 = \{(1,2), (2,4), (4,3), (3,5), (5,4), (4,1)\}$$

Bierzmy $R \stackrel{df}{=} R_2 \circ R_1$

Ponieważ $1 R_1 2$ i $2 R_2 4 \Rightarrow 1 R 4$ itd.

Zatem

$$R = \{(1,4), (2,1), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1), (4,2), (5,3)\}.$$

ZAD. Uzasadnić powyższe

ZAD. Zilustrować P3 za pomocą grafów.

ZAD.

Uzasadnić, że składanie relacji nie jest przemienne.

Uwaga.

Metoda reprezentowania relacji za pomocą grafu wykorzystywana jest na etapie projektowania relacji — rysujemy sobie graf przyszłej relacji.

Do przetwarzania relacji grafy są niewygodne.

Pokażemy teraz metodę ALGEBRAIZACJI relacji — za pomocą MACIERZY.

ZAD ([RR], str. 68 – 72)

W tym celu pokażę w jaki sposób można zakodować graf skierowany (za pomocą macierzy).

Niech dany będzie $G = (W, K, g)$ skończony, bez krawędzi wielokrotnych (g jest 1-1).

1°. Jeśli $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, to ustalmy (dowolny) porządek, np. $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$

2°. Definiujemy macierz $\underset{\substack{\| \\ [a_{ij}]}}{A_G} \in M_{n \times n}$, gdzie

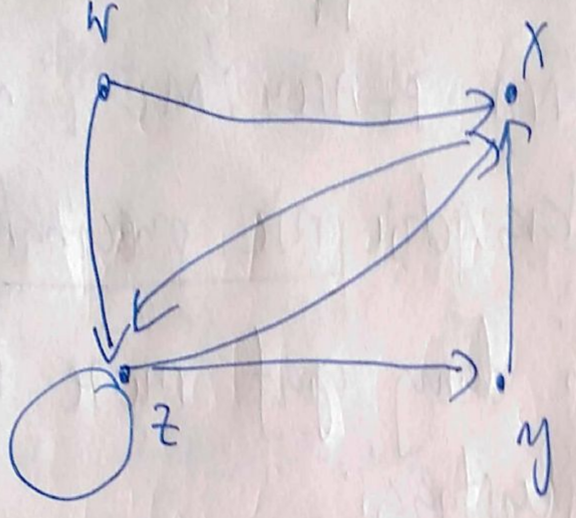
$$a_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{gdy w } w_i \text{ pętla} \\ 0, & \text{brak pętli} \end{cases}$$

Dla $i \neq j$
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jest } k: g(k) = (w_i, w_j) \\ 0 & \text{brak krawędzi } k \\ & g(k) = (w_i, w_j) \end{cases}$$

Tak zdefiniowana $A_G \in M_{n \times n}$ nazywa się

<u>MACIERZĄ SĄSIEDZTWA</u>.

<u>Pr.</u> Niech G będzie dany jak na rys. 5



Mamy $W = \{x, y, z, w\}$.
Ustalmy np. taki porządek
(w, x, y, z). Wtedy kodowanie

przebiega następująco

$$\begin{array}{c|cccc} & w & x & y & z \\ \hline w & & & & \\ x & & & & \\ y & & & & \\ z & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

ZAD.

Dokończmy kodowanie, a następnie poszukajmy dla innego porządku.

Pomiędzy $R \to G_R$ oraz $G_R \to A_R$ } $\Rightarrow$

FAKT.

Każdą 2-arg. relację $R \subset A \times A$ (A skończ.) można wyreprezentować (zakodować) za pomocą jej macierzy sąsiedztwa.

Dokładniej, jeśli $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oznacza uporządkowanie zb. A, to

$$A_G = [a_{ij}]_{n \times n},$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i R a_j \\ 0, & \neg(a_i R a_j). \end{cases}$$

Na odwrót, dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}$

$A = [a_{ij}]$

$a_{ij} \in \{0,1\}$ (binarnej)

istnieje relacja R określona na n-elementowym zbiorze $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,

$$a_i R a_j \iff a_{ij} = 1$$

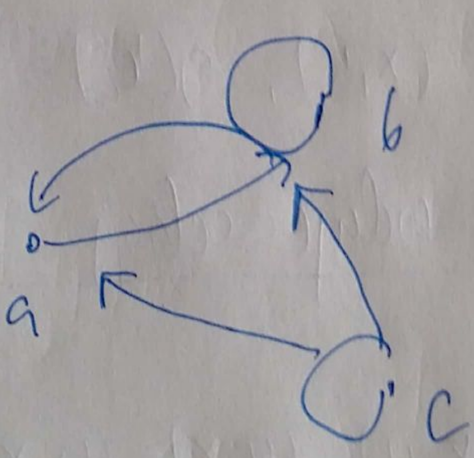
P.5. Niech macierz

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Narysujmy graf G, dla którego $A_G = A$.

Stąd dostajemy relację

(a, b, c)



Na kolejnym wykładzie pokażemy zalety reprezentacji

$R \longrightarrow A_R$