Kurs MD - wykład

Forma - wykład

tryb on-line

W7

Temat: · Metody reprezentacji relacji c.d.

· Klasyfikacja relacji!

Wprowadzenie. ...

Na W6 pokazaliśmy, że dla $R \subset A \times A$ mamy

$$R \longleftrightarrow G_R \text{ (graf skierowany)}$$

oraz

$$R \longleftrightarrow A_R \in M_{|A| \times |A|} \text{ (macierz sąsiedztwa).}$$

Zobaczmy jak zachowuje się m. sąsiedztwa, jeśli na relacjach będziemy wykonywali operacje:

$R^{\leftarrow}$ (odwracanie relacji)

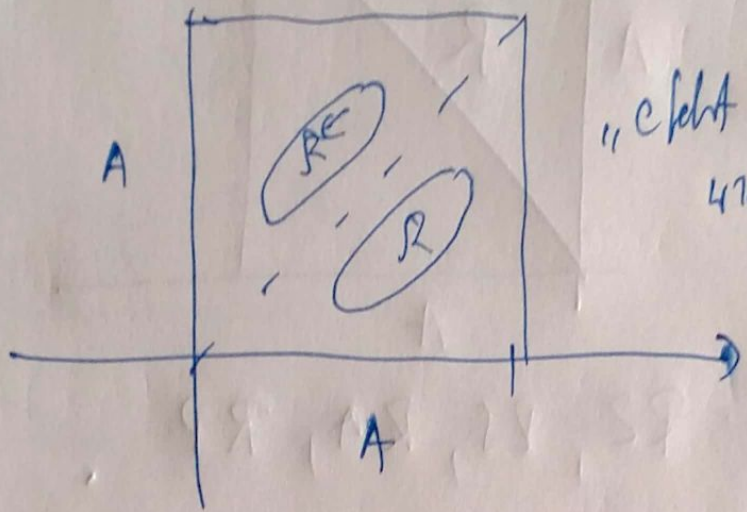
$R_1 \cup R_2$ (dodawanie)

$R_2 \circ R_1$ (składanie)

Dla $R \subset A \times A$: $aRb \equiv (a,b) \in R$,

$R^{\leftarrow} \subset A \times A$, gdzie $a R^{\leftarrow} b \equiv bRa$

Poniżej wys. ilustrację powstania $R^{\leftarrow}$



„efekt symetrii" względem DIAGONALI

Jasne, że $(R^{\leftarrow})^{\leftarrow} = R$.

Niech dla $R \longrightarrow A_R$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

i elementy A uporządkowaliśmy $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Wtedy $A_R = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i R a_j \\ 0 & \neg a_i R a_j \end{cases}$$

Niech $R^{\leftarrow} \longrightarrow B_{R^{\leftarrow}} = [b_{ij}]_{n \times n}$

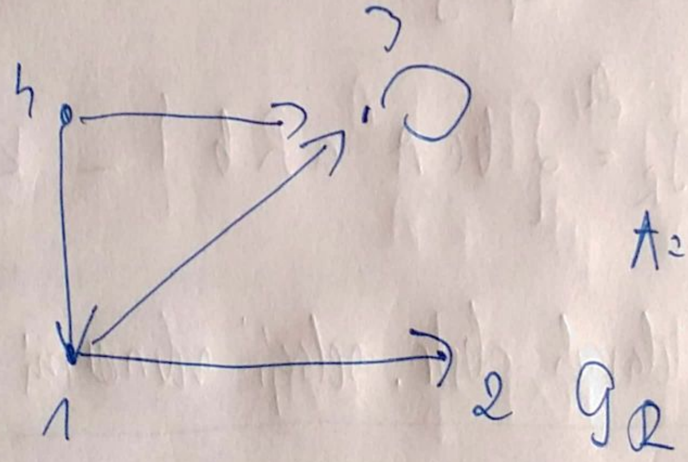
Wtedy

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i R^{\leftarrow} a_j \equiv a_j R a_i \\ 0 & \neg a_i R^{\leftarrow} a_j \equiv \neg a_j R a_i \end{cases},$$

a więc $\forall_{i,j}\ b_{ij} = a_{ji}$, co oznacza, że

$$\underline{B_{R^{\leftarrow}} = A_R^T}$$

P1. Dana jest relacja R przedstawiona grafem G_R

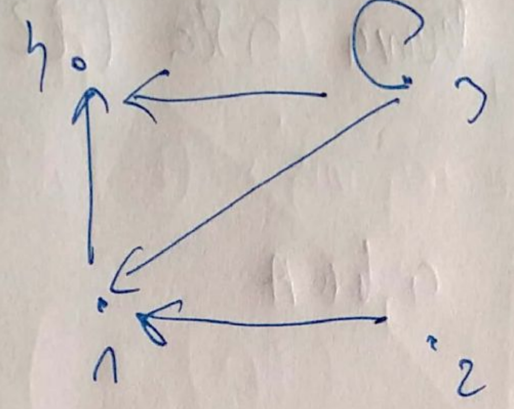


$A = \{1, 2, 3, 4\}$

Dla ciągu $(1, 2, 3, 4)$

$$A_R = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dla $R^{\leftarrow}$, jej graf ma postać



$G_{R^{\leftarrow}}$

co oznacza, że

$$A_{R^{\leftarrow}} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Jasne, że $A_{R^{\leftarrow}} = A_R^T$.

Dalej ponadto „nową algebrę" na $\{0,1\}$ - tzw. działania boolowskie: $\oplus$, $\odot$, gdzie

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Jasne jest, że $\oplus = \vee$, $\odot = \wedge$.

Niech teraz $A, B \in M_{n\times n}$ będą macierzami binarnymi.

Definiujemy: $A \oplus B = C$

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}], \quad C = [c_{ij}]$$

$$c_{ij} \stackrel{df}{=} a_{ij} \oplus b_{ij}$$

FAKT.
Niech dla $R_1, R_2 \subset A \times A$

$$R_1 \longrightarrow A_{R_1}$$
$$R_2 \longrightarrow A_{R_2}$$

Wtedy $R_1 \cup R_2 \longrightarrow A_{R_1 \cup R_2} = A_{R_1} \oplus A_{R_2}$

Dowód. ZADANIE (!) + analiza P.3.3.11 [RR]

FAKT. Niech R_1, R_2 j.w.

$$R_2 \circ R_1 \longrightarrow A_{R_1} \odot A_{R_2}$$

ZADANIE Analiza P.3.3.12, 13 [RR]

Klasyfikacja relacji.

Niech dana będzie $R \subset A \times A$, $A \subset X$.

Wyróżniamy 4 własności, które może mieć R:

(i) zwrotność (RZ)

$$\forall_{a \in A} \; aRa$$

(ii) symetryczność (RS)

$$\forall_{a,b \in A} \; aRb \Rightarrow bRa$$

(iii) antysymetryczność (RA)

$$\forall_{a,b \in A} \; (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a=b$$

(iv) przechodniość (RP)

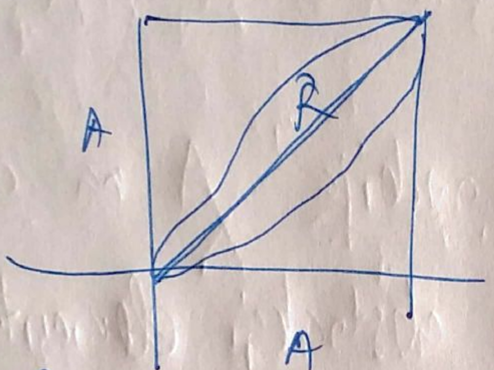
$$\forall_{a,b,c} \; (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc.$$

Uwagi:

① $A = \mathbb{R}$, $R =$ „$=$" jest RZ.

$A = P(X)$, $R =$ „$=$" zbiorów jest RZ

$A = \mathbb{R}$, $R =$ „$<$" NIE jest RZ



R musi zawierać diagonalę! aby był RZ

graf G_R ma n pętli, na diagonali A_R są same „1".

② Relacje na $\mathbb{R}$ $=, <, \leq$ są RP

$P(X)$ $=, \subset, \subseteq$ RP

ZAD. Analiza p. 3.4.1 [RR].

Tw. 3.4.1 [RR]

③ R jest RS $\Leftrightarrow$ $A_R = A_R^T$ $\Leftrightarrow$ $R = R^{\leftarrow}$

$\Downarrow$

R jest symetryczna względem diagonali

ZAD. Udowodnić to.

(5) Niech R będzie RA.

<u>Oryginalna</u> definicja, gdzie

(*) $\forall_{a,b \in A} \; aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

jest <u>niewygodna</u> w zastosowaniach.

Podamy jej <u>brzmienie równoważne</u>

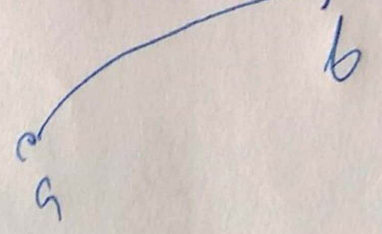
(*) (RA) $\Longleftrightarrow$

(**) $\forall_{a,b \in A} \; a \neq b \Rightarrow (\neg aRb \vee \neg bRa)$

<u>ZAD.</u> Uzasadnić, że.

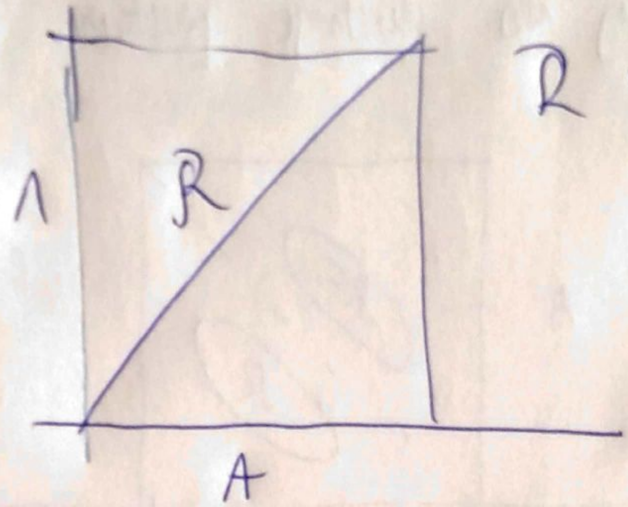
Jeśli zatem dla $a,b \in A$, $a \neq b$,

np. aRb, to $\neg bRa$, czyli



Ponadto, własności (RA) nie jest negacją własności RS

Przykłady.

1)  R = diagonala

R jest: RZ, RS, RA, RP.

2) $<$, $\mathbb{R}$, nie jest RA

$\leq$, $\mathbb{R}$ jest RA

3) $\subseteq$ na $P(X)$ jest RA.

Uwaga. (∗∗) pokazuje, że zadaniem R o własności (RA) byłoby „porządkowanie" elementów zbioru A.

Wyjaśnienia do dalej!

Relacja równoważności i jej własności

Def. Powiemy, że $R \subset A \times A$ jest rel. równoważ. jeśli R jest (co najmniej): $(RZ) \wedge (RS) \wedge (RP)$.

Przykłady: $(\mathbb{R}, =)$, $(P(X), =)$ są takie.

Niech R będzie rel. równoważności na A.
Dla $a \in A$ definiujemy:

$$[a]_R \overset{df}{=} \{ b \in A \; aRb \} \text{ – } \underline{\text{klasa abstrakcji}}\ a$$

FAKT (o klasach abstr. relacji równoważności)

1°. $a \in [a]_R$, $a \in A$

2. $\forall_{a,b \in A} \; [a]_R = [b]_R \Leftrightarrow aRb$

3°. $\forall_{a,b \in R} \; [a]_R \neq [b]_R \Leftrightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

<u>Dowód</u>.

1°. $a \in [a]_R$, bowiem aRa (RZ).

2°. Niech dla $a, b \in A$

$[a]_R = [b]_R$. Z 1° wiemy, że

$[a]_R \neq \emptyset$.

Weźmy $c \in [a]_R$, czyli aRc.

Ale wtedy $c \in [b]_R$, czyli bRc.

Z symetrii (RS) cRb. Zatem

$aRc \wedge cRb$, więc z przechodniości (RP)

aRb, ~~[illegible]~~

Na odwrót, niech aRb. Pokażmy, że

$[a]_R \subset [b]_R$.

Niech $c \in [a]_R$, czyli aRc.

Ale $aRb \Rightarrow bRa$.

Mamy więc $bRa \wedge aRc \Rightarrow bRc$,

co oznacza, iż $c \in [b]_R$.

Podobnie pokazujemy: $[b]_R \subset [a]_R$.

3°.

Pokażmy, że jeśli $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, to

$[a]_R = [b]_R$

Niech $c \in [a]_R \cap [b]_R$, czyli

$aRc \wedge bRc \iff$

$aRc \wedge cRb \Rightarrow aRb$, co

z 2° oznacza, iż $[a]_R = [b]_R$

Weźmy na chwilę zbiór $X \neq \emptyset$.

Powiemy, że rodzina $\mathcal{A} = \{A_t, t \in T\} \subset \mathcal{P}(X)$

jest <u>partycją</u> X, jeśli

1°. $\forall_{t,t'} \; t \neq t' \Rightarrow A_t \cap A_{t'} = \emptyset$

2°. $\bigcup_{t \in T} A_t = X$

Oczywiście skupiamy się na partycjach co najwyżej przeliczalnych, a więc $T \subset \mathbb{N}$.

<u>Tw. (Zasada Abstrakcji)</u>

Niech R będzie relacją równoważności na A. Wtedy istnieje partycja $\mathcal{P}_R$ zbioru A taka, że

$$\forall_{P \in \mathcal{P}_R} \; \exists_{a \in A} \; P = [a]_R$$

Na odwrót, dla dowolnej partycji $\tilde{P}$ zb. A istnieje relacja $\tilde{R} \subset A \times A$, która jest r. równoważności oraz $\tilde{P} = P_{\tilde{R}}$.

Komentarz.

1°. Mówimy, iż R „rozbija" A na atomy, które są klasami abstrakcji elementów A.

2°. ZA mówi, iż każda partycja generowana jest przez relację równoważności i na odwrót.

3°. Na kolejnym wykładzie podamy ważne przykłady takich rozbić.