Kurs: Matematyka DYSKRETNA

Forma: Wykład

Tryb: On-line

W. 9.

Temat: Diagram Hassego relacji częściowego porządku. Ważne przykłady.

Def 1. Przez DIAGRAM HASSEGO rozumiemy graf skierowany reprezentujący relację częściowego porządku, w którym:

(i) pomija się pętle (bo jest RZ)

(ii) pomija się efekt (RP) (będzie wyjaśnione niżej)

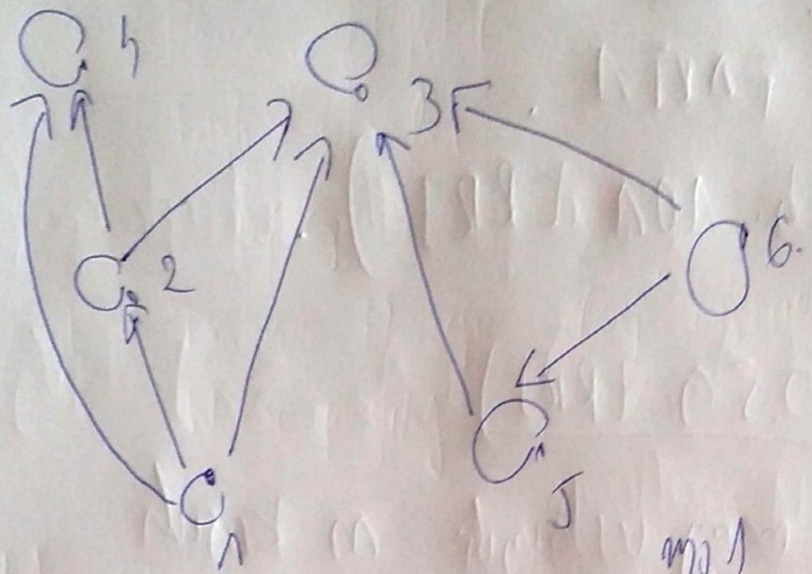
(iii) pomija się sygnalizację krawędzi skierowanej (będzie wyjaśnione niżej).

P1. (B.5.6 [RR])

Niech $R \subset A \times A$, gdzie

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

oraz dana grafem jak na rys. 1.



rys 1

Zauważmy, iż

1) $R \subset A \times A$ i ma: (RZ), (RP) i (RA), zatem $R =$ „$\preceq_A$"

2) Mamy $1 \prec_A 2$, $2 \prec_A 4$, $1 \prec_A 4$

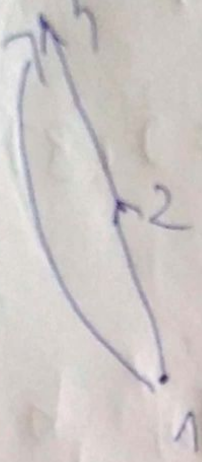
$2 \prec_A 3$, $1 \prec_A 3$, $6 \prec_A 3$

$6 \prec_A 5$, $5 \prec_A 3$

3) W diagramie można nie było krawędzi: $(1,4)$, $(1,3)$, $(6,3)$ ze względu na uwagę ~~RZU~~ (ii)

4) W diagramie można nie było pętli (uwaga (i)).

Weźmy fragment grafu (bez pętli)



rys. 2

Na tym przykładzie wyjaśnimy pojęcia NASTĘPNIKA.

Def 2. Niech $R =$ „$\leq$" na A oraz $a < b$. Powiemy, że b jest NASTĘPNIKIEM a, jeśli $\forall c \in A$

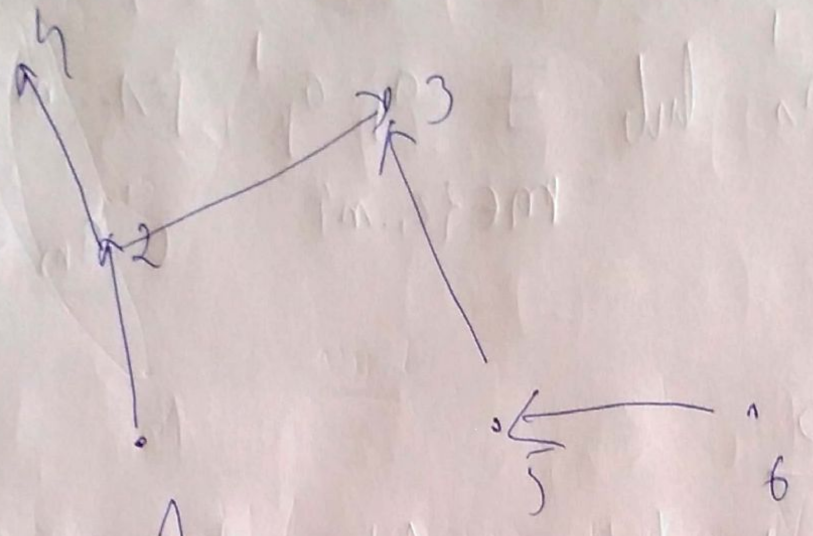
$$a < c \Rightarrow b \leq c$$

Wtedy dla sytuacji z rys. 2 mamy:

$$1 < 2, \quad 2 < 4, \quad 1 < 4$$

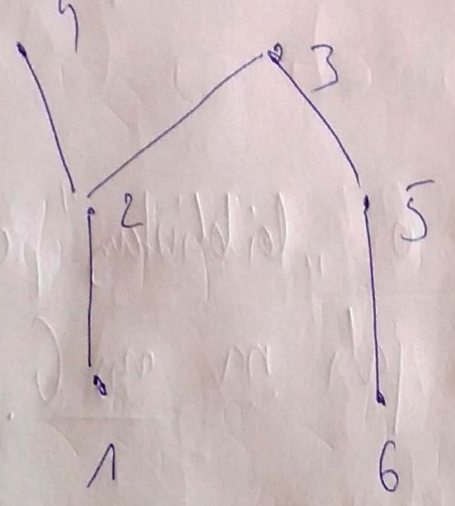
Wyznaczmy następniki 1 oraz 2: TYLKO „2" jest następnikiem „1" (bo „4" NIE JEST!)
Następnikiem „2" jest „4".

Dlatego, po uwzględnieniu (i) i (ii) graf ma postać (rys. 3)



rys. 3.

Na koniec można zrezygnować z krawędzi skierowanych (iii), na zasadzie: „NASTĘPNIK WYŻEJ”, jak na rys. 4.



rys. 4

Podsumujmy:

Tw. 1. Każdy skończony zbiór częściowo uporządkowany ma swój diagram Hassego.

ZAD. 1

Def. 3.1.15, Def. 3.1.16, Zał. 3.1.23 [ZR [RR]] str. 45-46.

Ważne przykłady relacji częściowego porządku.

Niech A będzie zbiorem skończonym. Dalej będziemy nazywali go ALFABETEM, każdy element $a \in A$ – jego LITERĄ (ZNAKIEM).

Z liter alfabetu A będziemy tworzyli SŁOWA wybierając z A podzbiór i ustawiając jego elementy w określonej kolejności dopuszczając możliwość powtórzeń. Przez $S(A)$ oznaczamy zbiór wszystkich takich słów, nazwiemy go SŁOWNIKIEM.

Dodatkowo zakładamy, że λ oznacza SŁOWO PUSTE i $S(A)$ uzupełniamy o nie

$$S(A) \longrightarrow S(A) \cup \{\lambda\}$$ i dalej piszemy $S(A)$.

P2.

$$A = \{a, b, c\}$$

(aab), (a), (cba) są przykładami itd.

I sposób uporządkowania $S(A)$ – relacja normalna $\preceq_n$.

Def 2.

$\forall_{s_1, s_2 \in S(A)}$ $s_1 \preceq_n s_2 \Leftrightarrow$ słowo s_1 jest współpoczątkowe ze słowem s_2, czyli

$$s_1 \preceq_n s_2 \Leftrightarrow \exists_{s \in S(A)} \text{ (także } \lambda) \ s_1 s = s_2 .$$

P.3 (3.5.7 [RR])

$A=\{a,b,c\}$, $s_1=aab$, $s_2=aabba$

$s_1 <_n s_2$ $(s=ba)$

ZAD 2

Udowodnić, że ~~(...)~~ $(S(A), \leq_n)$ jest

częściowym porządkiem, ale nie jest porządkiem.

ZAD 3

Analiza P. 3.5.8 ([RR]) - diagram Hassego dla

$(S(A), \leq_n)$.

. . . . .

Uwaga 1.

W def. relacji $\leq_n$ nie potrzebowaliśmy

relacji na alfabecie!

II sposób uporządkowania $S(A)$ – relacja standardowa $\leq_S$.

Wprowadzenie – pojęcie porządku leksykograficznego

Niech $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi.

Bierzemy ich produkt kartezjański $A_1 \times A_2$ i na nim definiujemy relację R:

$$(a,b)\,R\,(a',b') \iff a <_1 a' \text{ lub } a = a' \Rightarrow b \leq_2 b'$$

gdzie $a, a' \in A_1$, $b, b' \in A_2$.

FAKT 1 (o $\leq_L$)

Relacja R zdefiniowana j.w. jest częściowym porządkiem.

Dalej oznaczamy ją przez $\leq_L$ i nazywamy porządkiem LEKSYKOGRAFICZNYM.

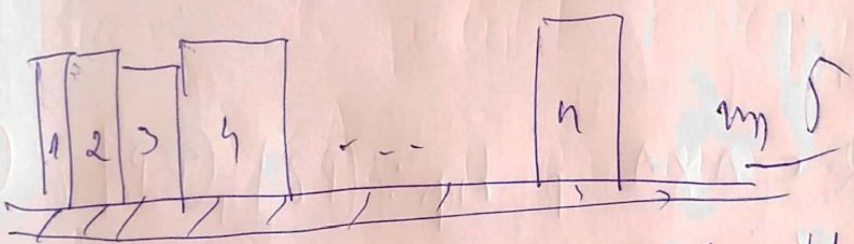
ZAD. 4

Udowodnić FAKT 1.

Wsk. (str. 101 [RR]).

P.4 (P.3.5.9 [RR])

Na półce mamy ustawionych n książek



Każda z książek ma określoną ilość stron.

Niech s_i - # stron książki i-tej.

Bierzemy zbiór

$$\{(i, s_i), i = 1..n\}.$$

Możemy go uporządkować relacją $\preceq_L$, gdzie

w zbiorze książek mamy relację $i < j$,

w zbiorze stron $s_i < s_i'$ $i = 1..n$

Wtedy na przykład:

$(3,456) <_L (4,66)$ bo $3<4$

$(3,37) <_L (3,56)$, bo $3=3$, $37<56$

<u>FAKT 2</u> (o $\leqslant_L$)

Jeśli relacje $\leqslant_1, \leqslant_2$ są porządkami, to $\leqslant_L$ również.

<u>Dowód</u>. ZADS (Wsk. sk. non LRRT)

Dalej potrzebujemy uogólnienia powyższej sytuacji na przypadek, kiedy mamy:

$(A_1, \leqslant_1), (A_2, \leqslant_2), \ldots, (A_n, \leqslant_n)$

$n \geqslant 2$

zbiorów cz. uporządkowanych.

Bierzemy $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ i na tym zbiorze definiujemy R

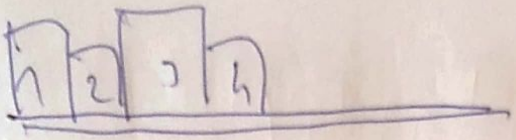
$(a_1, a_2, \ldots, a_n) R (a_1', a_2', \ldots, a_n') \iff$

$a_1 <_1 a_1'$ lub $\exists_{m \in \{2,\ldots,n\}}$ $a_j = a_j'$, $j = 1 \ldots m-1$ i $a_m \leq_m a_m'$.

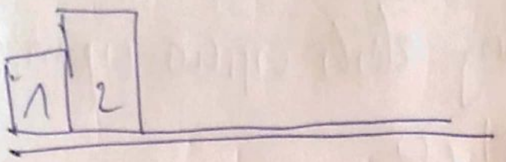
FAKT

Na każdym skończonym produkcie $A_1 \times \ldots \times A_n$ zbiorów cz. uporządkowanych $(A_i, \leq_i)$, relacja R określona wyżej jest częściowym porządkiem. Jeśli dodatkowo $(A_i, \leq_i)$ są porządkami, to R również.

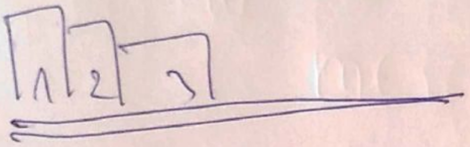
PS. Uzupełnij Ph o „bibliotekę", czyli sekwencję pętli jak na str. 6.



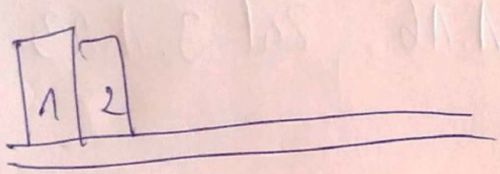
(4)



(3)



(2)



(1)

Mamy teraz porządek w zb. półek (i) < (j) /

Na całości mamy porządek

(i, j, s_j)

↓ ↓ ↓

półki # ks. # strony

Np. $(1, 20, 100) < (2, 1, 1)$ itd.

Szczególnym (ważnym) przypadkiem relacji R jest sytuacja gdy

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$$

oraz $\preccurlyeq_1 = \preccurlyeq_2 = \ldots = \preccurlyeq_n$.

Wtedy $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n$, a relację R na A^n oznaczmy $\preccurlyeq^n_L$.

Możemy teraz zdefiniować II rodzaj relacji na $S(A)$.

Zauważmy, że $S(A) = \{\lambda\} \cup \bigcup_{k \geq 1} A^k$,

gdzie A^k – słowa długości k.

Definicja relacji standardowej $\preceq_s$:

$$\forall_{s_1, s_2 \in S(A)} \quad s_1 \preceq_s s_2 \iff \exists_{n \geq 1} \; s_1, s_2 \in A^n \text{ i } s_1 \preceq_L^n s_2$$

albo $s_1 \in A^k$, $s_2 \in A^r$, i $k < r$

albo obydwa są puste.

7.6 (P.7.5.10 [RR])

A - alfabet łaciński wzbogacony o polskie znaki diakrytyczne z naturalnym porządkiem.

Weźmy kilka słów

„piórnik" „piernik", „pawilon",

„sputnik", „księgozbiór"

Mamy: 4 pierwsze są ze zbioru A^7 i wtedy

„pawilon" $\prec_s$ „piernik" $\prec_s$ „piórnik" $\prec_s$ „sputnik"

Natomiast ostatni $\in A^n$ i długo „spławik" $\preceq_s$ „krzywuloid".

P.7. (P. 2.5.11 [RO]).

Niech $A = \{0,1\}$, gdzie $0 <_A 1$.

Wypiszmy kilka początkowych słów w.g. porządku $\preceq_s$ ze zbioru $S(A)$

$$\lambda <_s \underbrace{0 <_s 1}_{A^1} <_s \underbrace{00 <_s 01}_{A^2} <_s \underbrace{000 <_s 001}_{A^3} <_s \ldots$$

Podsumowanie:

Tw (o relacji $\preceq_s$).

Jeśli A jest cz. uporządkowany, to $(S(A), \preceq_s)$ również. Jeśli dodatkowo A jest porządkiem, to $(S(A), \preceq_s)$ też.

Na kolejnym wykładzie podamy 3 przykłady porządków $S(A)$.