Materiały #1
do ćwiczeń: ZiP niestacjonarne
marzec 2022

Temat: Pochodna funkcji: jej definicja, znaczenie i metody obliczania

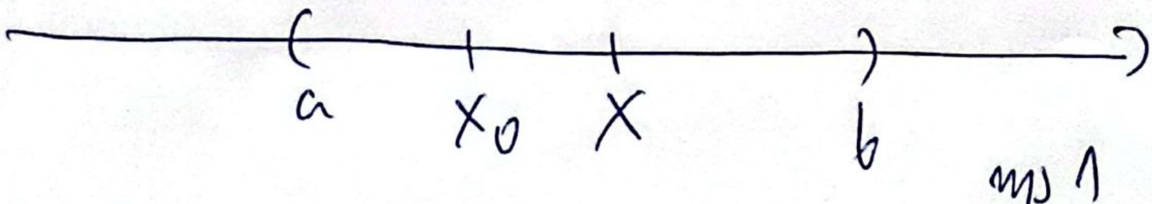
1°. Pojęcie ilorazu różnicowego i jego interpretacja.

Dana jest funkcja

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

oraz ustalony jej argument $x_0 \in (a,b)$

Bierzemy $x \neq x_0$ oraz $x \in (a,b)$, jak na rys 1



rys 1.

Zeskanowane w CamScanner

Będziemy też pisali

$$x = x_0 + \Delta x \ , \text{ gdzie } \Delta x = x - x_0$$
$$\Delta x \neq 0$$

<u>Wtedy</u>:

(1) $\Delta x = x - x_0$ – przyrost zmiennej niezależnej

(2) $\Delta_{x_0} f(\Delta x) = f(x) - f(x_0) =$
$= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – przyrost wartości funkcji w punkcie x_0, dla Δx

Przez $i_{x_0} f(\Delta x)$ oznaczamy <u>iloraz różnicowy</u> funkcji f w pkt. x_0 dla Δx, gdzie

Zeskanowane w CamScanner

(3)

$$i_{x_0} f(\Delta x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

lub korzystając z (1) i (2)

(4) $$i_{x_0} f(\Delta x) = \frac{\Delta_{x_0} f(\Delta x)}{\Delta x}$$

P1. Niech $t \to x(t)$

ruch jednostajny.

Wtedy (3) jest miarą prędkości średniej

P2. Niech $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

Dla $x_0 = 1{,}5$, $x > 0$, $x \neq 1{,}5$

$$i_{1,5} f(\Delta x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1{,}5}}{x - 1{,}5} = \frac{\sqrt{1{,}5 + \Delta x} - \sqrt{1{,}5}}{\Delta x}$$

$=$

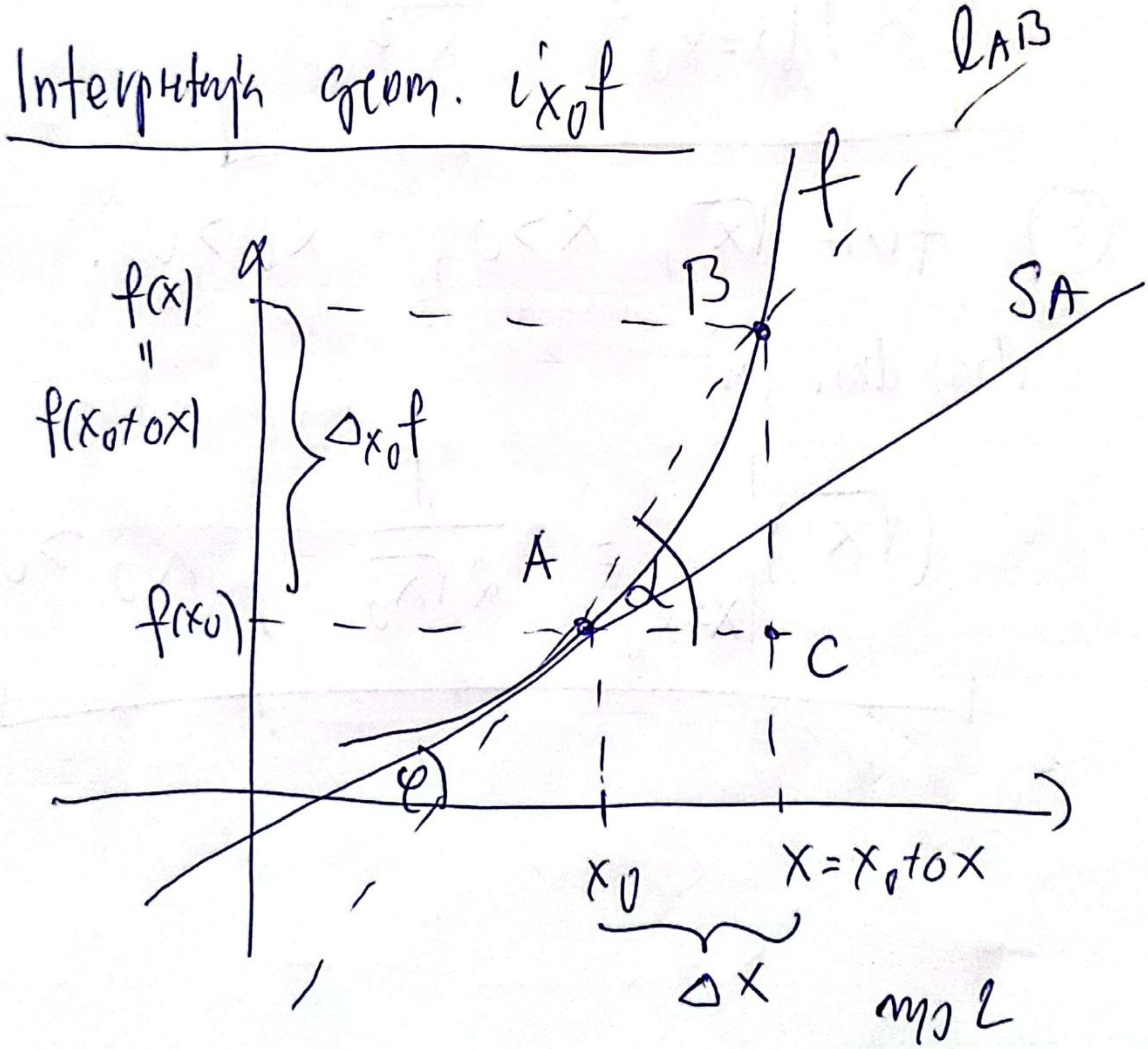
Zeskanowane w CamScanner

P3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

Dla $x_0 \neq 0, \quad x \neq x_0, \quad x \neq 0$

$$i_{x_0} f(\Delta x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

Interpretacja geom. $i_{x_0} f$



rys 2

Zeskanowane w CamScanner

Z def. (3),

jeśli $\sphericalangle CAB = \alpha$ (rys. 2), to

$$\operatorname{tg}\alpha = i'_{x_0} f(\Delta x).$$

Niech l_{AD} – prosta przechodząca przez punkty A, D. Nazywamy ją <u>sieczną</u> wykresu funkcji f.

Wtedy l_{AD} nachylona jest do osi OX pod kątem α.

Dlatego

(5) $i'_{x_0} f(\Delta x) = \operatorname{tg}$(kąta nachylenia l_{AD}).

Zeskanowane w CamScanner

2. Pochodna funkcji w punkcie, jako granica ilorazu różnicowego.

Jeśli istnieje granica

$$(6) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

to tę liczbę oznaczamy $f'(x_0)$ i nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0.

FAKT

$f'(x_0)$ istnieje dokładnie wtedy, gdy istnieje „graniczne" położenie siecznych l_{AD}. Wtedy tym granicznym położeniem jest prosta S_A, którą nazywamy styczną do wykresu f w pkt. A (p. rys. 2)

Zeskanowane w CamScanner

Co więcej, jeśli φ – kąt nachylenia S_A do OX, to

(7) $$\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$$

WNIOSEK

S_A ma równanie

(8) $$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$ gdzie

$A(x_0, f(x_0))$.

Zeskanowane w CamScanner

Przykłady.

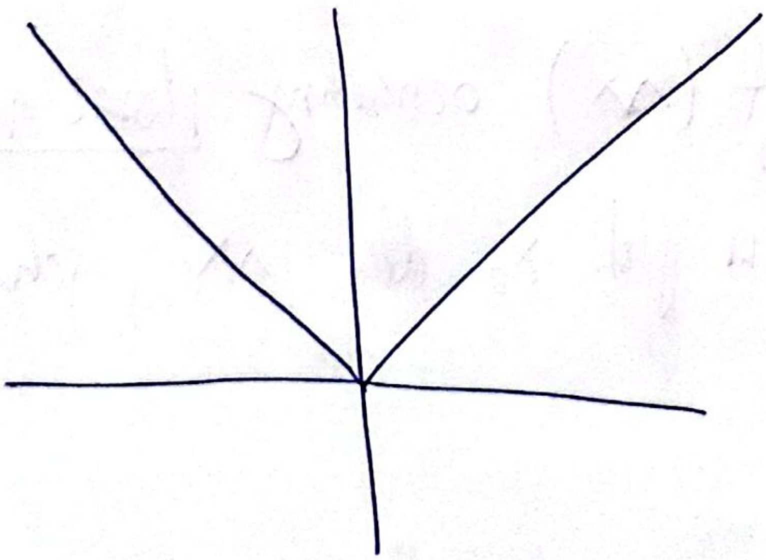
① Weźmy $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$x_0 = 0$.

Wtedy

$$i_0 f(\Delta x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Stąd $i_0 f(\Delta x)$ nie ma granicy $(x \to 0)$.
Zatem f nie ma pochodnej w $x_0 = 0$,
a więc nie istnieje styczna do wykresu f w $(0,0)$



rys. 3

Zeskanowane w CamScanner

(2) $f(x)=x|x|, \quad x\in\mathbb{R}$

$x_0=0$

$$i_0' f(\Delta x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x|x|}{x}=|x|$$

Dlatego

$$\lim_{x\to 0} i_{x_0}' f(\Delta x)=\lim_{x\to 0}|x|=0,$$

co oznacza, że $\underline{f'(0)=0}$.

ZAD 1. Narysuj wykres f

(3) $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x\neq 0,$

$x_0=1$

$$i_1' f(\Delta x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}$$

$$=\frac{1}{x}\,\frac{1-x}{x-1}=-\frac{1}{x}$$

Zeskanowane w CamScanner

Dlatego

$$\lim_{x\to 1} i_1' f(\Delta x) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1,$$

czyli $f'(1) = -1$

(h) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$,

Sprawdzić, czy istnieje $f'(x_0)$, $x_0 \neq 0$

$$i'_{x_0} f(\Delta x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

Dlatego $\Delta x \to 0$, to

$$i'_{x_0} f(\Delta x) \longrightarrow -\frac{1}{x_0^2}, \text{ czyli}$$

Zeskanowane w CamScanner

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

<u>Uwaga</u>:

Ostatni wynik zapisujemy też

$$\left(\frac{1}{x}\right)'_{|x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

(5) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, $x_0 > 0$.

Uzasadnić, że

$$(\sqrt{x})'_{|x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \quad x_0 > 0$$

Zeskanowane w CamScanner

Mamy kolejno:

$$i'_{x_0} f(\Delta x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

czyli $x \to x_0$, to

$$i'_{x_0} f(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Zeskanowane w CamScanner

3. Pochodna funkcji i metody jej obliczania.

Dla $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$,
załóżmy, że dla każdego $x_0 \in (a,b)$ istnieje $f'(x_0)$.
Wtedy powiemy, że f jest różniczkowalna (na (a,b)).
Możemy też mówić o funkcji
$(a,b) \ni x \longrightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$, którą
oznaczamy przez f' – jest to pochodna f.

Zauważmy, że $f'|_{x=x_0} = f'(x_0)$, czyli jeśli
znamy f', to możemy łatwo wyznaczyć $f'(x_0)$ –
jest to wartość f' dla $x=x_0$.

Aby wyznaczyć f' potrzebne są tzw. REGUŁY RÓŻNICZKOWANIA (RR).
Omówimy je kolejno.

Zeskanowane w CamScanner

Wzory (tzw. „tabelka")

f	f'	
C (f. stała)	0 (jako f. stała)	
af	af'	
x^n $(n \geq 1)$	nx^{n-1}	
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
e^x	e^x	

P1. $(x^2)' = 2x$, $x \in \mathbb{R}$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \tfrac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Zeskanowane w CamScanner

Dlatego, np.

$$(\sqrt{x})'\Big|_{x=5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Typowa funkcja różniczkowalna f ma jedną z własności:

(i) $f = f_1 + f_2$ (jest sumą funkcji)

(ii) $f = f_1 - f_2$ (-"- różnicą -"-)

(iii) $f = f_1 \cdot f_2$ (-"- iloczynem -"-)

(iv) $f = \frac{f_1}{f_2}$ (-"- ilorazem -"-)

(v) $f = f_2 \circ f_1$ (-"- złożeniem -"-),

gdzie na ogół f_1, f_2 są z tabelki.

Dlatego potrzebne są kolejne 5 reguł:

a) o pochodnej sumy:

$$f' = (f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$$

b) o pochodnej różnicy $f' = (f_1 - f_2)' = f_1' - f_2'$

Zeskanowane w CamScanner

c) $f' = (f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$ –

o pochodnej iloczynu

d) $f' = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}$ –

– o pochodnej ilorazu.

Przykłady.

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)' \overset{\text{tabela}}{=}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\ln x - e^x\right)' = (\ln x)' - (e^x)' \overset{\text{tabeli}}{=}$$

$$= \frac{1}{x} - e^x$$

Zeskanowane w CamScanner

$$(\ln x \sin x)' = (\ln x)' \sin x + \ln x (\sin x)' \overset{\text{tabeli}}{=}$$

$$= \frac{1}{x} \sin x + \ln x \cdot \cos x$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\ln x}\right)' = \frac{(\sqrt[3]{x^2})' \ln x - \sqrt[3]{x^2} (\ln x)'}{(\ln x)^2} =$$

$$\overset{\text{tabeli}}{=} \frac{(x^{2/3})' \ln x - \underbrace{x^{2/3} \cdot \frac{1}{x}}_{= x^{-1/3}}}{(\ln x)^2} \overset{\text{tabeli}}{=}$$

$$\frac{2/3\, x^{-1/3} \cdot \ln x - x^{-1/3}}{(\ln x)^2} =$$

$$= \frac{x^{-1/3}}{(\ln x)^2} \left(\frac{2}{3} \ln x - 1\right)$$

Zeskanowane w CamScanner

Wyjaśnimy teraz regułę różniczkowania f. złożonej, czyli

$$f = f_2 \circ f_1,$$ co oznacza, iż

$$f(x) = f_2(f_1(x))$$

f. wewnętrzna

f. zewnętrzna.

Przykładowe rozkłady (P.R.)

P1. Niech $f(x) = \sqrt{\sin x}$

P.R. $x \longrightarrow \sin x = u \quad : f_1$

$u \longrightarrow \sqrt{u} \quad : f_2$

P2 $f(x) = \sin\sqrt{x}$

$x \longrightarrow \sqrt{x} = u \quad : f_1$

$u \longrightarrow \sin u \quad : f_2$

Zeskanowane w CamScanner

P3.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

PR:

$$x \longrightarrow -x^2 = u \quad : f_1$$

$$u \longrightarrow e^u \quad : f_2$$

P4 $f(x) = \ln \sin x$

$$x \longrightarrow \sin x = u$$

$$u \longrightarrow \ln u$$

RR f. złożonej:

Jeśli $f = f_2 \circ f_1$ oraz f_1 jest różniczkowalna w x_0 i f_2 jest różniczkowalna w $f_1(x_0)$, to f jest różniczkowalna w x_0 i zachodzi:

$$f'(x_0) = f_2'\big|_{f_1(x_0)} \cdot f_1'\big|_{x=x_0} =$$

$$= f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0)$$

Zeskanowane w CamScanner

Dla P_1.

$$f_1(x) = \sin x \longrightarrow f_1'(x) = \cos x$$

$$f_2(u) = \sqrt{u} \longrightarrow f_2'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Dlatego

$$\left(\sqrt{\sin x}\right)'\Big|_{x=x_0} = \cos x\Big|_{x=x_0} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}\Big|_{\substack{u=\sin x\\ x=x_0}}$$

$$= \cos x_0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x_0}}$$

Dla P_2

$$f_1(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f_2(u) = \sin u \longrightarrow f_2'(u) = \cos u$$

Dlatego

$$\left(\sin\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=x_0} \cdot \left(\sin u\right)'\Big|_{\substack{u=\sqrt{x}\\ x=x_0}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \cos\sqrt{x_0}$$

Zeskanowane w CamScanner