Ćwiczenia do kursu

Matematyka, 28.05.2022

Temat: Zastosowanie rachunku różniczkowego: monotoniczność, ekstrema lokalne i globalne, badanie przebiegu zmienności funkcji.

1°. Wyznaczanie przedziałów monotoniczności funkcji.

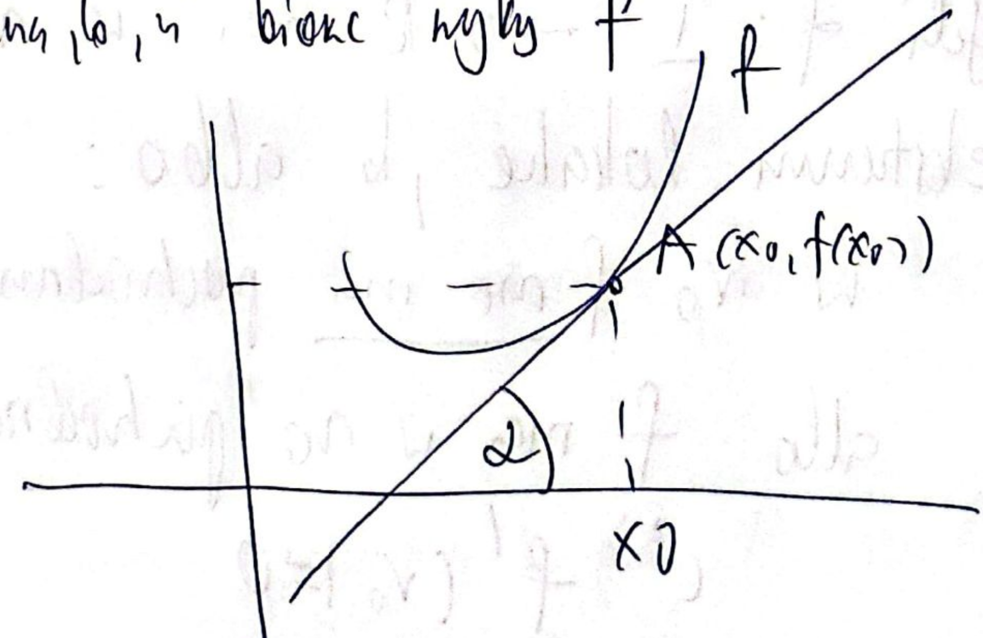
Niech I oznacza przedział otwarty, np.

(a,b), $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$

oraz $f: I \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna, gdy

$\forall_{x_0 \in I}$ istnieje $f'(x_0)$.

Oznaczmy, że α kąt nachylenia f

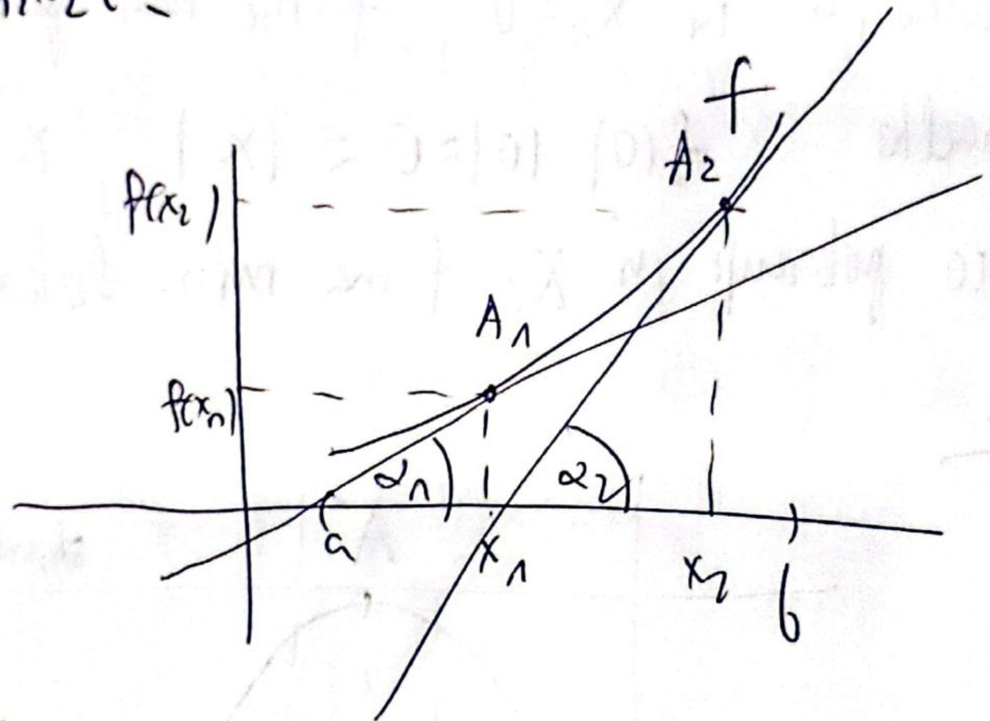


W pkt A istnieje graniczne położenie siecznych, czyli prosta nazywana styczną do wykresu f w pkt A.

Wtedy $f'(x_0) = tg\alpha$.

Niech dodatkowo f będzie rosnąca, czyli

$$\forall_{x_1, x_2 \in I} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Problem 1.

Co jest powodem, że f jest rosnąca, bowiem na oko. Poszukaj źródła tego efektu.

Odp. Zauważ, że dla k. pkt. A (np. A_1, A_2)

$$\alpha \in (0, \pi/2) \Rightarrow tg\alpha > 0.$$

Możemy udowodnić:

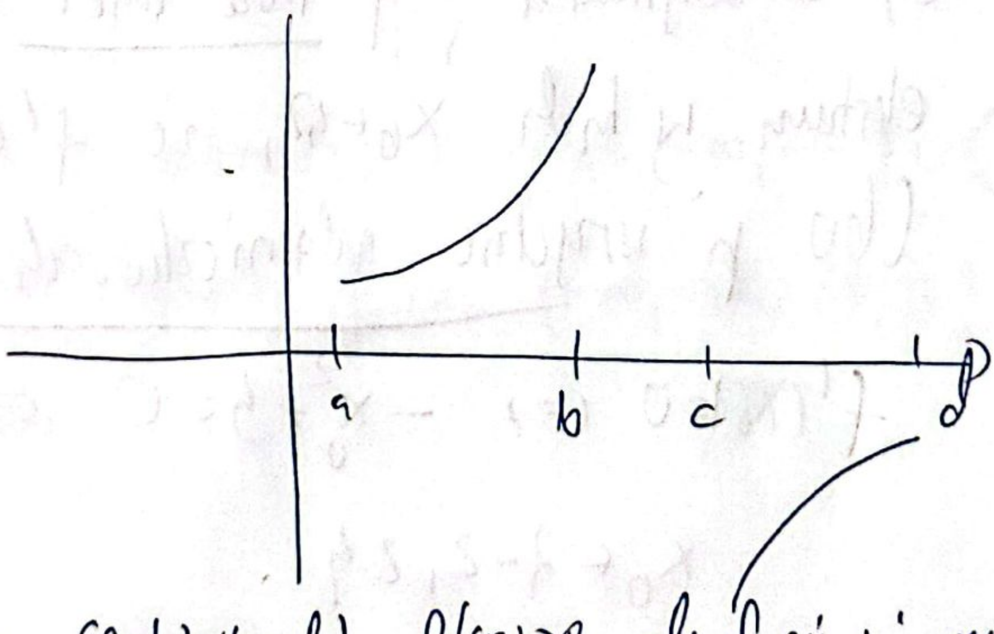
Tw 1. Jeśli na I f jest różniczkowalna, oraz $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$, to f jest rosnąca.

Analogicznie, jeśli $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$, to f jest malejąca.

Ponadto, gdy $\forall x \in I\ f'(x) = 0$, to f jest stała.

Uwaga 1.

Tw. 1 prawdziwe jest tylko dla $f: D_f \to \mathbb{R}$, gdzie D_f jest przedziałem.



$\forall x \in D_f = (a,b) \cup (c,d),\ f'(x) > 0$, ale f nie jest rosnąca

71. Wyznacz p. monotoniczności f, gdzie

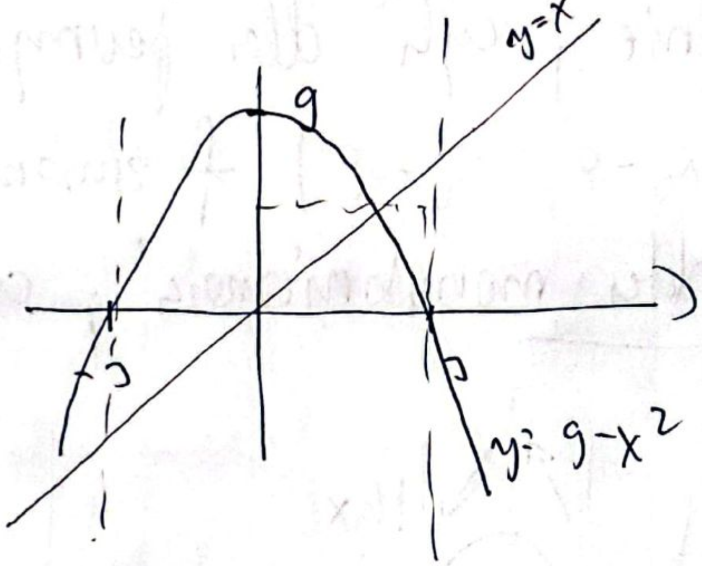
$$f(x) = \sqrt{9x - x^3}$$

Algorytm

a) wyznaczamy dziedzinę f:

$$x \in D_f \iff 9x - x^3 \geq 0 \iff x(9 - x^2) \geq 0$$

$$\iff x(3-x)(3+x) \geq 0$$



Z rys. $x(3-x)(3+x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 0, 3\rangle$

Dalej badamy zachowanie f na $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$.

b) wyznaczamy f'.

f i funkcją złożonej

$$x \longrightarrow 9x - x^3 = u$$

$$u \longrightarrow \sqrt{u}\ ,$$

dlatego

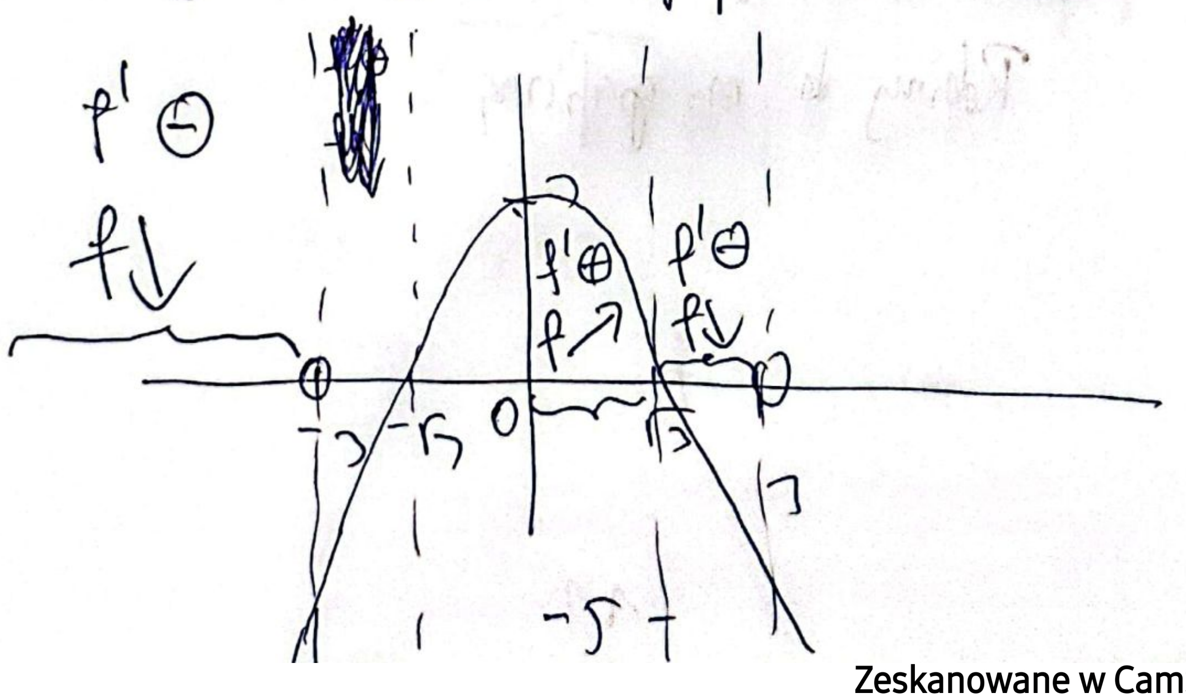
$$f'(x) = (9x-x^3)'(\sqrt{u})'\Big|_{u=9x-x^3} =$$

$$= (9-3x^2)\frac{1}{2\sqrt{9x-x^3}} \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty,-3) \cup (0,3)$$

Dlatego $f'(x) = \cancel{\ldots} = \frac{3}{2\sqrt{9x-x^3}} \cdot (3-x^2)$,

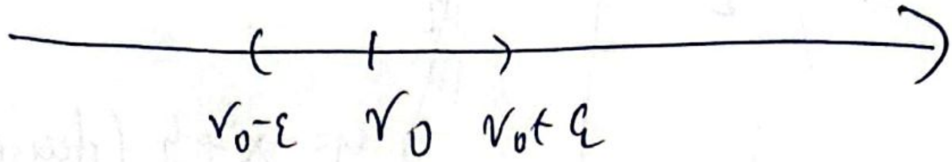
co oznacza, że o znaku f' decyduje $3-x^2$.

c) ustalamy przedziały z D_f, na których f' ma stały znak (metoda graficzna)



2. Ekstrema lokalne

termin „lokalne" oznacza, że chodzi o otoczenie liczby x_0, czyli przedział $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, $x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$



gdzie ε jest „odpowiednio" małe.

Niech teraz $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I - przedział)

Jeśli dla x_0 i pewnego $\varepsilon>0$, że

a) $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset I$

b) f w x_0 na $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ma wartość największą (albo najmniejszą), tj.

$$\forall_{x\in(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon)} \quad f(x) \le f(x_0)$$

$$(\ f(x) \ge f(x_0) \ )$$

to mówimy, że f w x_0 ma ekstremum lokalne, odpowiednio: maksimum (minimum) lokalne.

P2. Nie każda f ma ekstremum lokalne, np. f rosnąca (malejąca) NIE ma.

Problem 2.

Co jest przyczyną, że f ma ekstremum lokalne i jak je wyznaczyć?

Problem 2 rozwiązuje się stosując dwa kryteria:

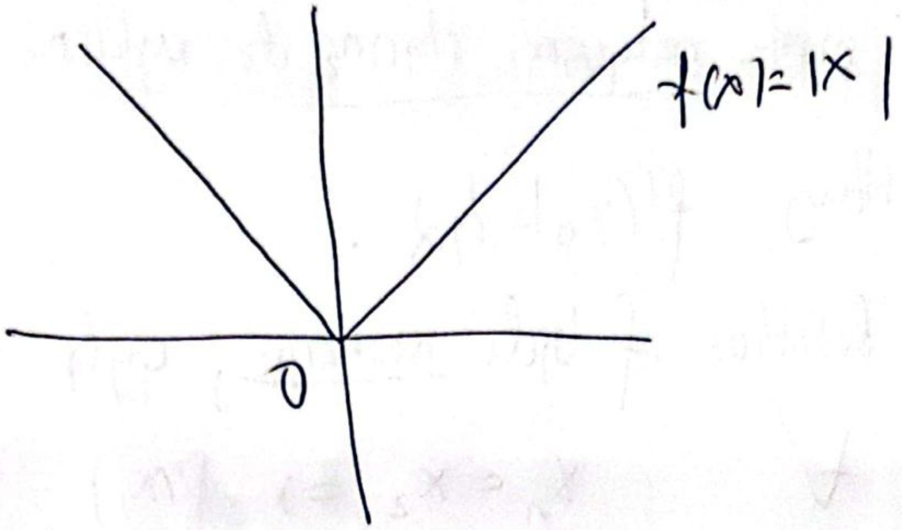
Kryterium 1 (warunek konieczny)

Jeśli $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ma w $x_0 \in I$ ekstremum lokalne, to albo:

w x_0 f nie ma pochodnej,

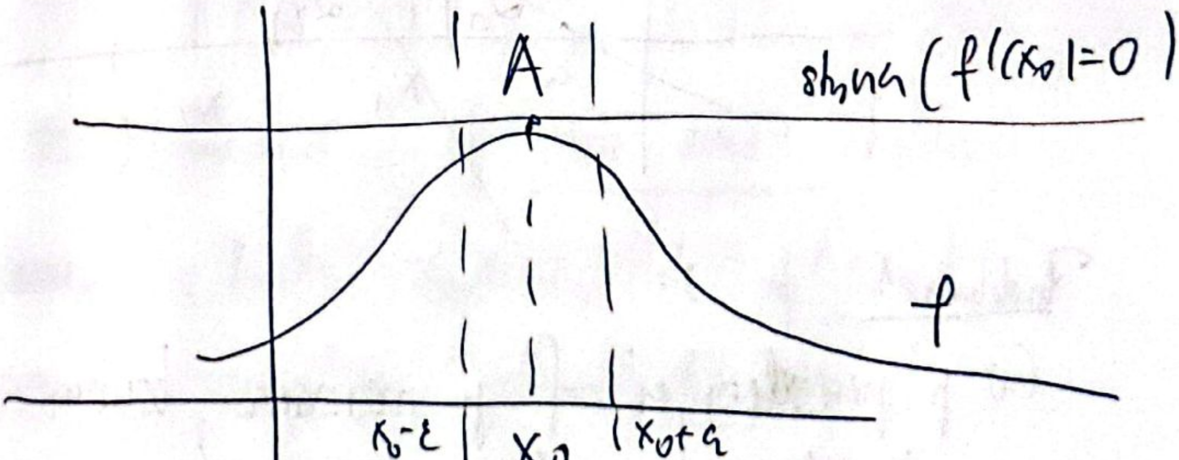
albo f ma w x_0 pochodną i $f'(x_0)=0$

P 3.



Wiadomo, iż w $x_0=0$, f nie ma pochodnej.
Ponadto $f(0)=|0|=0 \le |x|$, $x \in \mathbb{R}$,
co pokazuje iż x_0 f ma min. lokalne!

P 4.



Styczna do wykresu f w pkt $A(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi OX $(f'(x_0)=0)$

P. 5.

Wyznaczyć ekstr. lokalne $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

Algorytm

a) wyznaczamy dziedzinę f:

· U nas $D_f = \mathbb{R}$

b) obliczamy f'

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+4}\right)' = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Z kryterium 1, f może mieć tylko ekstremum w tych $x_0 \in \mathbb{R}$, że $f'(x_0) = 0$ (bo f jest wszędzie różniczkowalna)

$$f'(x_0) = 0 \iff -x_0^2 + 4 = 0 \iff$$

$$x_0 \in \{-2, 2\}.$$

WNIOSEK.

f może mieć ekstr. lokalne tylko w -2 lub 7.

Aby to rozstrzygnąć, potrzebujemy

Kryterium 2 (warunek dostateczny).

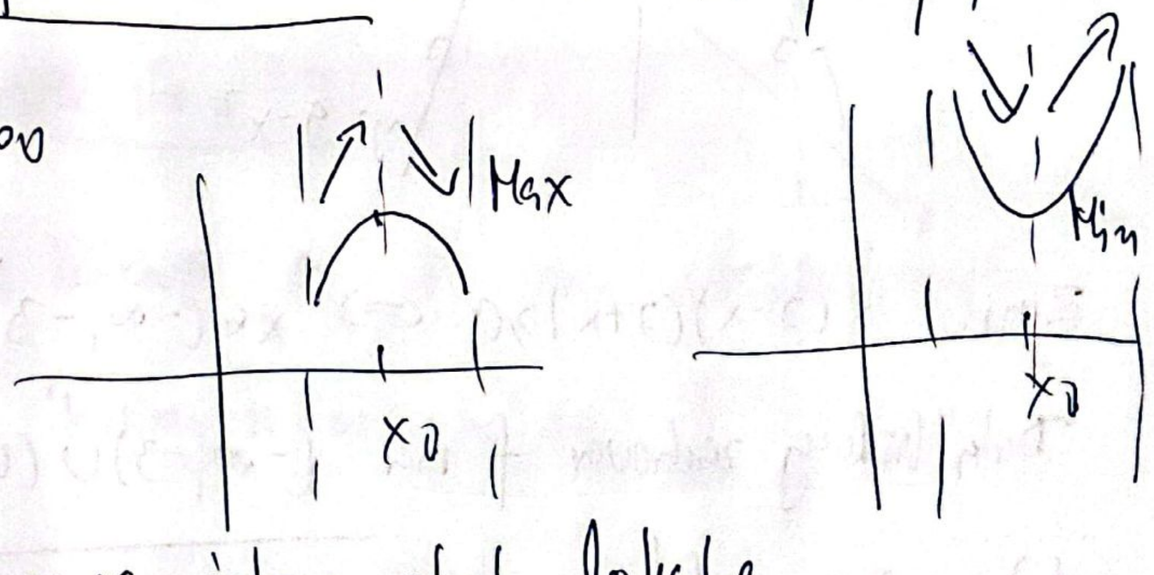
Niech x_0 jak w kryterium 1.

Jeśli lokalnie, czyli dla pewnego $\varepsilon > 0$

na $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ f zmienia

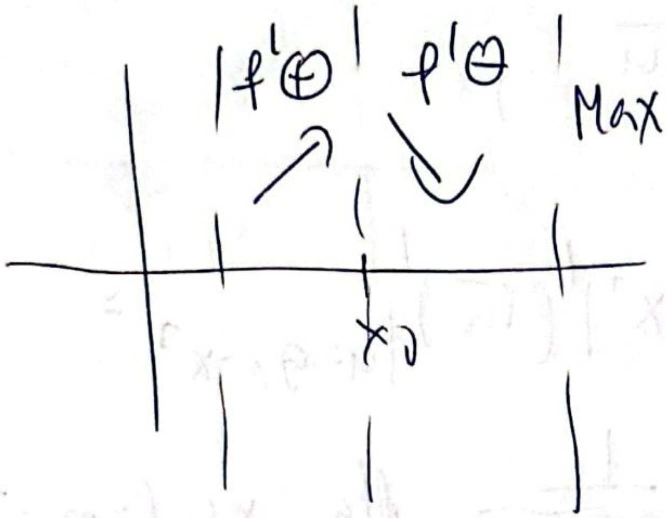
swój charakter monotoniczności, czyli

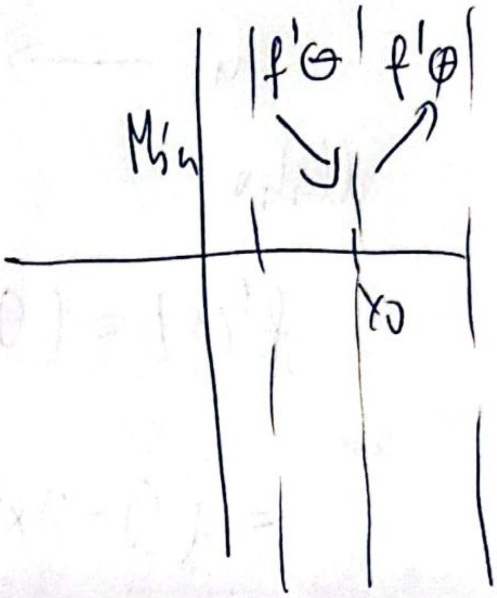
albo



to w x_0 istnieje ekstr. lokalne

W szczególności, jeśli dodatkowo f jest różniczkowalna, to jak wiemy z Problem 1, jeśli



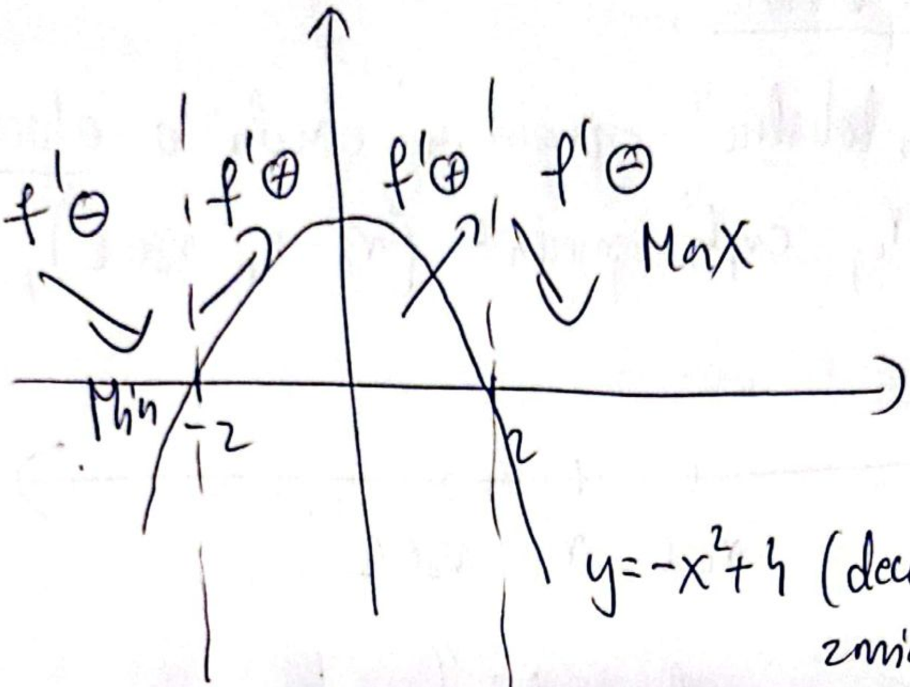


(*) Mówimy, że „f' zmienia znak przy przejściu przez swoje miejsce zerowe”.

<u>Wracamy do P5</u>

d) Sprawdź, czy f' ma własność (*)

Robimy to m. graficzną:



$y=-x^2+4$ (decyduje o zmianie znaku f')

<u>Odp.</u> w -2 Min lok $f(-2)=\frac{-2}{8}=-1/4$

w 2 Max lok $f(2)=\frac{2}{8}=1/4$

3. <u>Ekstrema globalne.</u>

Niech $f: D_f \to \mathbb{R}$.

Jeśli dla $x_0 \in D_f$,

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \leq f(x_0),$$

to mówimy, że w x_0 f ma wartość <u>największą</u> i oznaczamy $f(x_0)=\max\limits_{D_f} f$

(12)

Analogicznie, gdy

$$\forall_{x \in D_f} \quad f(x) \geq f(x_0),$$

to mówimy, że w x_0 f ma wartość najmniejszą,

$$f(x_0) = \min_{D_f} f.$$

Jeśli jest j.w., to mówimy, że f ma ekstremum globalne typu max (lub min).

Problem:

Kiedy f ma swoje ekstremum globalne i jak je wyznaczyć?

Odpowiada na to poniższe Tw. oraz algorytm.

Tw. 2 Niech $f: D_f \to \mathbb{R}$, gdzie $D_f = [a,b]$ oraz f ciągła.

Wtedy f ma ekstremum globalne.

Co więcej, wtedy x_0 opisane wyżej jest albo typu $\{a, b\}$, albo, $x_0 \in (a, b)$ oraz w x_0 nie istnieje pochodna, lub jeśli istnieje, to $f'(x_0) = 0$.

Algorytm:

a) stwierdzić, że $D_f = [a, b]$, f co najmniej ciągła

b) bierzemy zbiór

$\{a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b\}$)

$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$, gdzie

w x_k ($k = 1, \ldots n$) f nie ma pochodnej lub ma i $f'(x_k) = 0$.

c) Obliczamy

$W = \{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)\}$.

Wtedy największa liczba w W, np.

$f(x_j)$ wskazuje x_j z max globalnym,

najmniejsza z min globalnym.

Z. 6

Dla $f(x) = x^2 \ln x$, $x \in [1, e]$ wyznaczyć ekstr. globalne.

Ponieważ dla $x \in (1, e)$, istnieje f', więc f jest ciągła na $[1, e]$.

Zatem z Tw. 2 f ma ekstr. globalne.

$$f'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = 2x \ln x + x$$

$$= x(2 \ln x + 1), \quad x \in (1, e)$$

Zatem $f'(x) = 0 \iff x(2 \ln x + 1) = 0 \iff$

$x = 0$ lub $x = e^{-1/2}$. Ale $x \in (1, e)$, więc $f'(x) \neq 0$ bo $x = e^{-1/2} < 1$.

Mamy zatem zbiór

$\{1, e\}$ oraz

$W = \{f(1), f(e)\} = \{\ln 1, e^2 \ln e\}$

$= \{0, e^2\}$.

<u>Odp.</u> Dla $x_1 = 1$ mamy min glob $= 0$

$x_2 = e$ — " — max — " — $= e^2$.

4. Badanie przebiegu zmienności funkcji.

W ramach tej procedury należy:

a) wyznaczyć dziedzinę funkcji

b) przedziały monotoniczności funkcji

c) ustalić znak funkcji (miejsca zerowe)

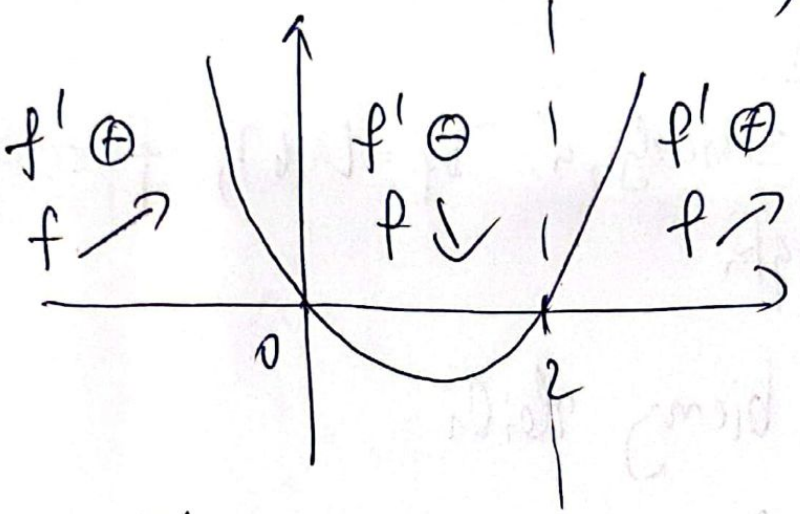
d) wyznaczyć ekstrema lokalne i globalne

P7.

Zbadać $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a) $x \in D_f \iff x \in \mathbb{R}$

b/d) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3(x^2 - 2x) = 3(x(x-2))$



$f'(x) = 0 \iff x = 0$ lub 2, dla h 0

w 0 — Max lok.

w 2 - Min lok.

c) Miejsca zerowe: f jest wielomianem. Zauważmy, że $f(-1) = 0$, co oznacza, że $x^3 - 3x^2 + 4$ dzieli się przez $x+1$

AF

Dzielimy:

$$
\begin{array}{l}
\quad\; x^2 - 4x + 4 \\
\hline
(x^3 - 3x^2 + 4) : (x+1) \\
\underline{x^3 + x^2} \\
\quad -4x^2 + 4 \\
\quad \underline{-4x^2 - 4x} \\
\qquad\quad 4x + 4 \\
\qquad\quad \underline{4x + 4} \\
\qquad\quad\; 0 \quad 0
\end{array}
$$

Stąd $(x^3 - 3x^2 + 4) = (x+1)(x^2 - 4x + 4)$

$$= (x+1)(x-2)^2$$

Stąd $f(x) = 0 \iff x = -1 \lor x = 2$

Ponadto:

$$f(x) \geq 0 \iff x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$$

$$f(x) \leq 0 \iff x + 1 \leq 0 \iff x \leq -1$$

Agregujemy wyniki w postaci tabeli

x	$-\infty \to$	-1	$\to$	0	$\to$	2	$\to +\infty$
f'	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-$	0	$+$	4 Max lok.	$+$	0 Min lok.	$+$

Szkic wykresu f