PSK – Lab 26.04.25

Liczby pseudolosowe i ich zastosowania.

1°. MPWLB

Niech X ma 2-i moment, a nie istnieje $EX = m$ i $var(X) = \sigma^2$

Bierzemy ciąg (X_n) : $d(X_n) = d(X)$ i niezależne.

Wtedy $$P(\{\omega \in \Omega : \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)(\omega) \longrightarrow m\}) = 1,$$

czyli z prawd. 1, ciąg $\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)(\omega)$ przybliża m.

2°. Zastosowanie.

Niech $g \in C([0,1])$ i weźmy $I = \int_0^1 g(t)\,dt$.

Wiadomo, że wtedy $I = G(1) - G(0)$, gdzie $G' = g$.

Ale nie zawsze G jest elementarna (np. $g(t) = e^{-t^2}$).

Metoda Monte Carlo (MCM)

Bierzemy $X \in \mathcal{J}([0,1])$ oraz $Y = g(X)$

Wtedy $$EY = E\,g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t)\cdot t\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt = I$$

Stąd, z MPWLB, całkę I można przybliżyć

$$\frac{1}{n}(Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \ldots + Y_n(\omega)) = \frac{1}{n}(g(X_1)(\omega) + g(X_2)(\omega) + \ldots + g(X_n)(\omega))$$

$$= \frac{1}{n}(g(X_1(\omega)) + g(X_2(\omega)) + \ldots + g(X_n(\omega))) = \frac{1}{n}(g(x_1) + \ldots + g(x_n))$$

gdzie $x_j = X_j(\omega)$.

Liczby $v_j = X_j(\omega)$, $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(X)$, $X \sim \mathcal{J}([0,1))$

nazywamy losowymi.

Problem. W jaki sposób metodą algorytmu wygenerować v_j?
Ponieważ będą one wynikiem zastosowania algorytmu, nazywamy je
pseudolosowymi.
Mają następujące własności
(i) Należą do przedziału $\mathcal{J}([0,1))$
(ii) Kolejne powstają w warunkach stochastycznej niezależności.

Zatem, jeśli $(u_k)_{k=1}^{n}$ są takie, to

$$\bar{u}_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) \approx 1/2 = EX$$

$$\frac{1}{n}\left((u_1-\bar{u}_n)^2 + (u_2-\bar{u}_n)^2 + \dots + (u_n-\bar{u}_n)^2\right) \approx \frac{1}{12} = \mathrm{var}(X)$$

Jest to tzw. TEST STATYSTYCZNY.
Na niezależność można przeprowadzić test geometryczny,
biorąc punkty $P_k = (u_k, u_{k+1})$, $k = 1, \dots, n-1$

3. Dwa algorytmy generowania L.P-L.

a) LCG (linear congruential generator) Lehmera (1951).

Najpierw generujemy ciąg l. naturalnych X_k, $k = 1, 2 \dots n$, gdzie, dla danych $X_0, a, m \in \mathbb{Z}_+$ (X_0 – „seed")

$$X_k = aX_{k-1} \pmod m$$

Wtedy $X_k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ (jako reszty z dzielenia).
$k = 1, 2 \dots, n$

Bierzemy $u_k = \frac{X_k}{m}$, $k = 1 \dots, n$ jako wynik.

Uwaga. Powyższy ciąg (X_k) jest okresowy, a tak być nie może. Zatem trzeba zadbać, aby okres był odp. duży.

Wiadomo, że:

jeśli $m = 2^L$, $L \geq 4$, to okres $T = 2^{L-2}$,

(*) o ile (i) X_0 – nieparzyste
(ii) $a = 3 \pmod 8$ lub $a = 5 \pmod 8$,

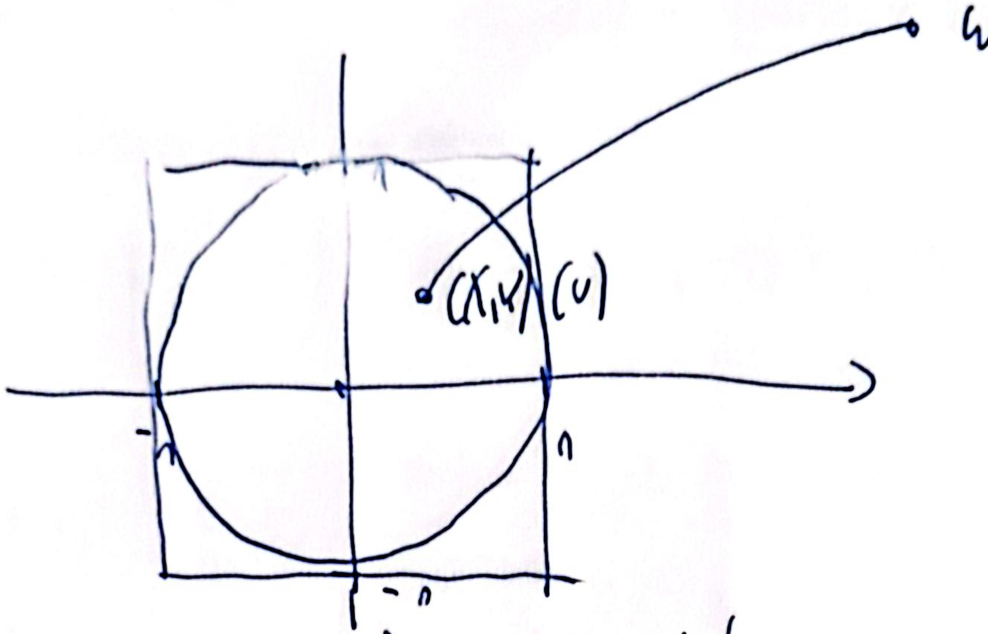
czyli $r_8(a) \in \{3, 5\}$

Problem 1. Napisać program, który
a) na podstawie (*) ustala okres $T > 100$
b) generuje co najmniej T l. p.los.
c) przeprowadza test Studenta
d) przeprowadza test geometryczny.

Problem 2.

Na podstawie danych z P1, wylicz aproksymację liczby π metodą geometryczną.

W kwadrat wpisujemy koło $\mathbb{O}$ jak niżej



Niech $X, Y \in U((-1,1))$ niezależne i bierzemy

$$C = \{ \omega \in \Omega : (X,Y)(\omega) \in \mathbb{O} \}$$

Wtedy $P(C) = \frac{\pi 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$, ale

$$P(C) = EZ, \text{ gdzie } Z(\omega) = \begin{cases} 1, & X^2(\omega) + Y^2(\omega) \le 1 \\ 0, & \text{dla pozost.} \end{cases}$$

Stąd

(**) $\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{n} \left(Z_1(\omega) + Z_2(\omega) + \ldots + Z_n(\omega) \right)$

Ale $EZ = P(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = 1\})$, zatem (**) można zapisać następująco:

(∘) najpierw potrzeba l. przedziału z $[-1,1]$.
Wtedy robimy ciąg danych z P1
$(u_1, u_2 \ldots u_n)$ i zamieniamy na ciąg
$(2u_1-1,\ 2u_2-1,\ \ldots,\ 2u_n-1)$ — przedział z $[-1,1]$.

Wtedy, te zbiory są zd. mierzalne, więc

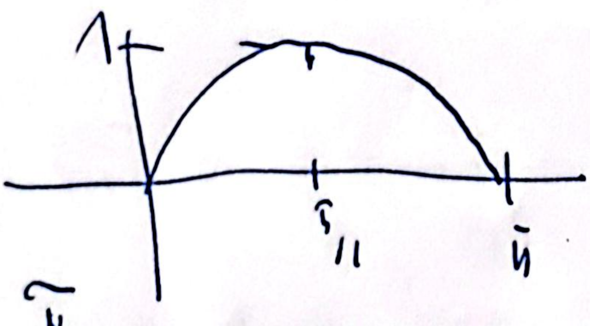
$$(\circ\circ)\quad X^2(\omega) + Y^2(\omega) \le 1 \equiv (2u_k-1)^2 + (2u_{k+1}-1)^2 \le 1$$

Dlatego

$$(\ast\ast)\quad \frac{\pi}{4} \approx \frac{\#\text{ tych par, które spełniają } (\ast\ast)}{\#\text{ par} = n-1}$$

Problem. π aproksymacja l. π. (MCM)

Bierzemy funkcję $[0,\pi] \ni x \longrightarrow \sin x \in [0,1]$



Wtedy $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$

Ale $\int_0^{\pi} \sin x\,dx \overset{x=\pi t}{=} \pi \int_0^1 \sin \pi t\,dt$, co oznacza, że

$$\pi = \frac{2}{\int_0^1 \sin \pi t\,dt}$$

Zatem
$$\pi \approx \frac{2}{MCM\left(\int_0^1 \sin \pi t \, dt\right)}$$

Problem 4. III aproks. l. π — metodą Buffona.

Problem 5 IV aproks. l. π — na podst. rozkładu normalnego.

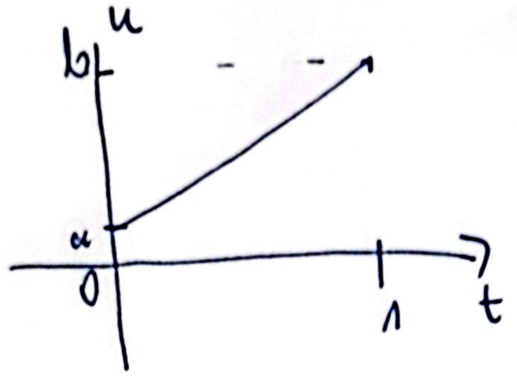
Niech $X \in N(0,1)$. Wtedy
$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\,du$$

Wiadomo, że $\Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0{,}9972$

Stąd
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-u^2/2}\,du \approx 0{,}9972,$$ lub
$$\sqrt{\pi} \approx \frac{\int_{-3}^{3} e^{-u^2/2}\,du}{0{,}9972 \cdot \sqrt{2}}$$

Jak MCM obliczamy $\int_{-3}^{3} e^{-u^2/2}\,du$

Sytuacja ogólna: $I = \int_a^b g(u)\,du$, g – ciągła.



$u = (b-a)t + a$

$t = 0 \to u = a$
$t = 1 \to u = b$

Hen:

$$I = \int_0^1 g((b-a)t+a)\,(b-a)\,dt = (b-a)\int_0^1 g((b-a)t+a)\,dt$$

Whng

$$MCM\left(\int_a^b g(u)\,du\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} g((b-a)u_j + a),$$

gdh $(u_j)_{j=1}^{n}$ l. prudie.