Kurs: PSK

Forma zajęć: Lab

tryb: on-line

LAB 1

Temat. MPK i jego własności.

Problemy

1°. Zaproponować model p. dla eksperymentu

a) pojedynczy rzut 2 monetami

b) rzut monetą i kostką do gry

c) losowanie $1 \le k < n$ kul z urny złożonej z n kul

2°. Bierzemy zbiór $X = \{a, b, c, d\}$ oraz $A = \{a\}$. Niech $\mathcal{A} = \{A\}$. Uzupełnić $\mathcal{A}$ do σ-ciała.

3°. Niech $\mathcal{A}$ będzie σ-ciałem podzbiorów X. Uzasadnić, że (i) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

4°. Niech $|X| = n$. Udowodnić, że $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|} = 2^n$

5°. Niech (Ω, Σ, P) M.P.K. Pokazać, że P jest funkcją niemalejącą.

6°. Niech (Ω, Σ, P) będzie dana.
Udowodnić, że

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad A, B \in \Sigma,$$

a następnie na tej podstawie wyprowadzić wzór na

$$P(A \cup B \cup C), \quad A, B, C \in \Sigma.$$

7°. Wiadomo, że A, B są stochastycznie niezależne.
Udowodnić, że A^c, B i A^c, B^c również są s.n.

8°. W sposób niezależny rzucamy 100 razy kostką symetryczną.
Określić prawd., że „6" wypadnie częściej niż 95 razy.

9°. Metodą T. P. udowodnić, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad 1 \le k \le n-1$$

10°. P.2.3.5 ([RR]).

11°. P.2.6.6 ([RR])

12°. P.2.7.7 ([RR]).

Rozwiązania i uwagi:

1°. a) Musimy zacząć od propozycji opisu wyniku obserwacji tego ZL, czyli ω.

Mamy 2 monety (czyli różne!). Jak to zasygnalizować w opisie? Metodą „etykietowania" — wyróżniamy jedną z nich

Wtedy tej drugiej monecie nadać etykietę „2"

Wtedy $\omega = (\quad , \quad)$

wynik „1"   wynik „2"

Rzut jednoczesny 2 monetami ma swoje konsekwencje: „1" nie wpływa na wynik „2". Co to oznacza?
Poprawna odpowiedź pozwala dokończyć opis.

b) Mamy sytuację jak wyżej, dlatego MPK (Ω, Σ, P) ma postać:

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, gdzie

$(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$ – opisuje np. monetę

(Ω_2, F_2, P_2) - kostka.

Wtedy

$\Omega \ni \omega = (\omega_1, \omega_2)$: $\omega_1 \in \{O, R\}$

$\omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Jeśli $P_1(\{O\}) = p$ $\quad P_2(\{j\}) = p_j \quad j = 1 \dots 6$

$P_1(\{R\}) = 1-p \qquad p_1 + p_2 + \dots + p_6 = 1$,

to np.

$$P(\{O, j\}) = p \cdot p_j$$

$$P(\{R, j\}) = (1-p) \cdot p_j$$

c) Niech X - mnogość kul w urnie, gdzie $|X| = n$.

Wtedy

ω jest k-elementowym podzbiorem zb. X.

Jeśli $\mathcal{C}_k$ oznacza rodzinę wszystkich k-el. podzbiorów zbioru X, to:

$$|\mathcal{C}_k| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ oraz}$$

$\omega \in \mathcal{C}_k$, zatem $\Omega = \mathcal{C}_k$

Z treści zadania wynika (dlaczego?), że model jest jednorodny, dlatego dla $A \in \Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

2°. Oczywiście $\mathcal{A}$ nie jest σ-ciałem (dlaczego?). Poprawne uzasadnienie wskazuje na czym ma polegać uzupełnienie $\mathcal{A}$!

3°. Jeśli $A, B \in \Sigma$, to ponieważ (dlaczego?)

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \Sigma \text{ (dlaczego?)}$$

Podobnie $A \setminus B = A \cap B^c$, zatem z powyższego $A \setminus B \in \Sigma$.

4°. Niech $|X| = n$

Zauważmy, że każdy podzbiór można zakodować ciągiem binarnym. Dokładnie, z X robimy listę, tj. dla $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,

Lp		A
1	x_1	
2	x_2	
$\vdots$	$\vdots$	
n	x_n	

Bierzemy $A \subset X$ i odczytujemy listę: jeśli $x_j \in A$, wpisujemy „1", w przeciwnym razie „0".

Zatem $A \longleftrightarrow b \in Bin_n$

$\downarrow$ ciągi binarne dł. n

np. $\emptyset \longleftrightarrow (0, 0 \dots 0)$

$X \longleftrightarrow (1, 1 \dots 1)$

$\{x_1\} \longleftrightarrow (1, 0, 0 \dots 0)$, itd.

Zatem $|P(X)| = |Bin_n|$ (dlaczego?).

Ale $|Bin_n| = 2^n$ (dlaczego?)

5°. Mamy pokazać, że

$$\forall_{A,B\in\Sigma} \quad A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$$

Niech $A\subset B$. Stąd

$$B = A \,\dot\cup\, (B\setminus A).$$

Z zad 3°. wiemy, że $B\setminus A\in\Sigma$, więc

$$P(B) = P(A) + P(B\setminus A)$$

Prosty dokończ!

6°. Niech $A, B\in\Sigma$.

$$A\cup B = (A\setminus B)\,\dot\cup\,(B\setminus A)\,\dot\cup\,(A\cap B)$$

Ale
$$A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$$
$$B\setminus A = B\setminus(A\cap B).$$

Z zad 5 wynika, że

$$P(A\setminus B) = P(A) - P(A\cap B)$$

Proszę dokończyć!

Jeśli mamy A, B, C, to ponieważ

$$A \cup B \cup C = \underbrace{(A \cup B)}_{E} \cup C = E \cup C$$

i możemy stosować

$$P(E \cup C) = P(E) + P(C) - P(E \cap C).$$

Proszę dokończyć!

7°. Z założenia

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Weźmy parę A^c, B.

Ponieważ $A^c \cap B = B \cap A^c = B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$, to

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \overset{\text{z zał.}}{=} P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A))$$

Dokończ!

8°. Bierzemy model $B(n,p)$, $n = 100$, $p = 1/6$ (dlaczego).

Wtedy $A = S_{96} \cup S_{97} \cup S_{98} \cup S_{99} \cup S_{100}$

Proszę dokończyć!

9°. Zapiszmy tożsamość następująco:

$$(*) \quad 1 = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} + \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}},$$ i ją udowodnimy.

W tym celu skonstruujemy M.P.K (Ω, Σ, P):

Weźmy zbiór $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $|X| = n$

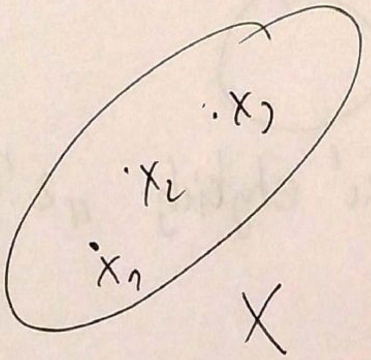
$\omega \in C_k$ – wybrana k-elementowa podzbiór X, zatem $\Omega = C_k$. Wiadomo, że $|\Omega| = |C_k| = \binom{n}{k}$. MPK będzie skończony i jednorodny, zatem mamy sytuację, gdzie P jest prawdop. klasyczne.

Załóż $A \in \Sigma = P(\Omega)$

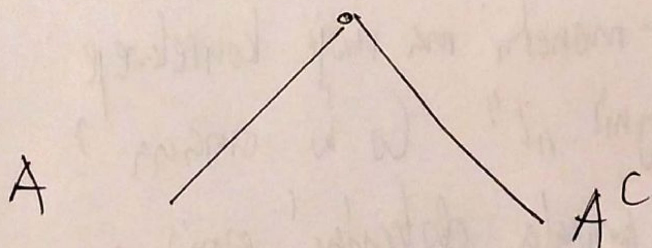
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{\binom{n}{k}}$$

Aby udowodnić (*) trzeba zlicz. A.

W tym celu wybierzmy z X jeden element, np. x_1



Wybór k-elem. podzbioru z X polega zatem na tym, że



A	A^C
x_1 należy do niego	x_1 nie należy do niego
↓	↓
trzeba dobrać $k-1$ elementów z $X \setminus \{x_1\}$	trzeba dobrać k elementów z $X \setminus \{x_1\}$
na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów	↓ na $\binom{n-1}{k}$ sposobów

Ale $P(A) + P(A^c) = 1$

Proszę dokończyć!

10°, 11°, 12° Do przeczytania!