Kurs PSK Lab

termin: 27.03.25 ($13^{30} - 15^{00}$)

grupa stacj.

<u>Temat</u> Rozkłady prawdop. i ich własności.

(i) Przypadek X dyskretny

X ma rozkład dyskretny oznacza, że:

a) istnieje ZL

b) jego model (Ω, Σ, P)

c) odwzorowanie $X: \Omega \to \mathbb{R}$, że

$$X(\Omega) = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}\}$$

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_n\}) = p_n \in (0,1),$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} p_n = 1.$$

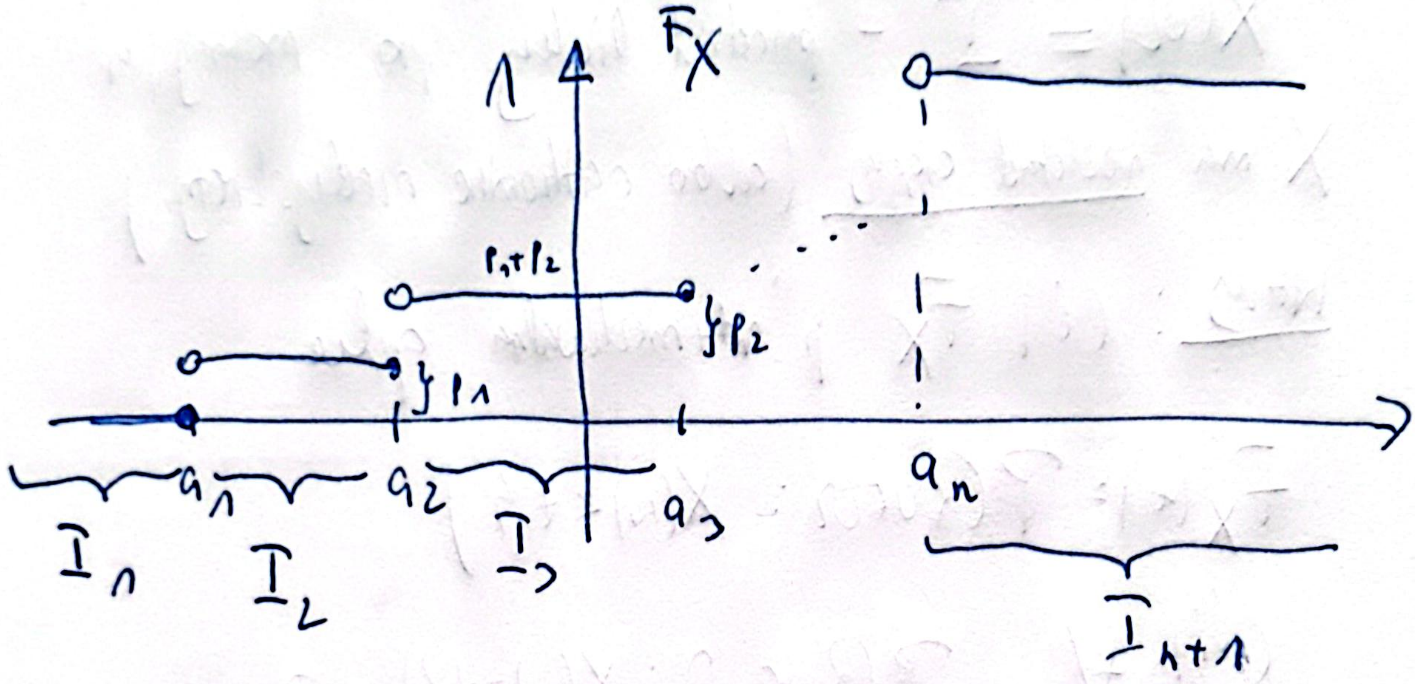
d) wtedy

$F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\})$ – dystrybuanta rozkł. prawd. (lub zmiennej losowej X) <u>jest typu</u> „schodkowego".

Typowa sytuacja

a_1	a_2	$\dots$	a_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n

$(a_1 < a_2 < \dots < a_n)$



Wtedy

$$P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=a_1\}) = \lim_{t\to a_1^+} F_X - F_X(a_1) = p_1$$

itd.

Pr. 1

d_X	-2	1	4
	$0{,}1$	$0{,}7$	$0{,}2$

Oznaczmy dla $Zd \longrightarrow (\Omega, \Sigma, P)$,

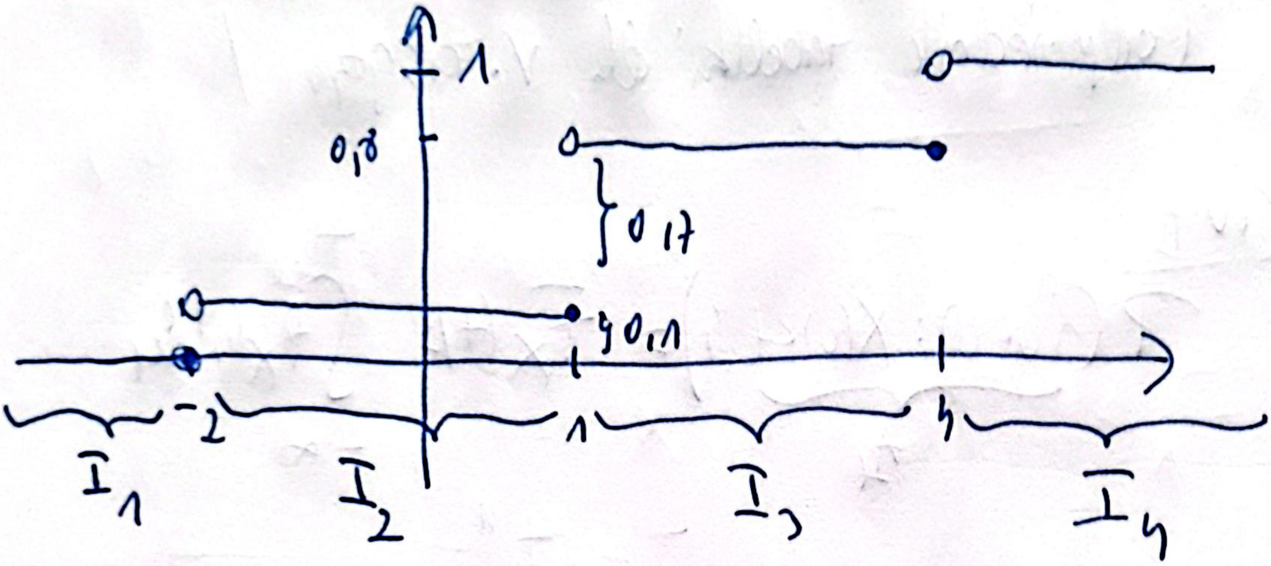
$\Omega = A_{-2} \cup A_1 \cup A_4$

$X(\Omega) = \{-2, 1, 4\}$

$A_{-2} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = -2\}$, $P(A_{-2}) = 0{,}1$

$A_1 = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}$ $P(A_1) = 0{,}7$

$A_4 = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 4\}$ $P(A_4) = 0{,}2$



P.2. $X \in B(n, p)$ (Bernoulli)

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $p \in (0,1)$ - dane

np. $X \in B(7; 0{,}1)$

$$\forall_{k \in \{0, \ldots, n\}} \quad p_k = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

P3. $X \in \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$ (Poisson)

$$X(\Omega) = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} = \{0,1,2,\dots\}$$

$$p_k = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Dlaczego $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$?

Uzasadnienie:

Fakt. $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ e^a = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}$

Mamy $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$

$$\overset{\text{Fakt } (a=\lambda)}{=} e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

P4. $d(X)$:

-2	0	3	5
$0{,}1$	$0{,}15$	$0{,}2$	$0{,}55$

Bierzemy $Y = 2X - 1$. Wyznaczyć d_Y $(= d(Y))$.

Krok 1. Wyznaczamy $Y(\Omega)$

$\{\omega\in\Omega : X(\omega) = -2\} = \{\omega\in\Omega : Y(\omega) = -5\}$

$\{\omega\in\Omega : X(\omega) = 0\} = \{\omega\in\Omega : Y(\omega) = -1\}$

$\{\omega\in\Omega : X(\omega) = 3\} = \{\omega\in\Omega : Y(\omega) = 5\}$

$\{\omega\in\Omega : X(\omega) = 5\} = \{\omega\in\Omega : Y(\omega) = 9\}$

Krok 2. Konstrukcja d_Y

$$d_Y : \begin{array}{c|c|c|c} -5 & -1 & 5 & 9 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}55 \end{array}$$

Przykład. Niech $X_0 : d_{X_0} : \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}$, $p\in(0,1)$, $p+q=1$

Dla $n\geq 2$, bierzemy ciąg zmiennych losowych:

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, gdzie

(i) $d(X_j) = d(X_0)$, $j = 1 \ldots n$

(ii) $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ są niezależne, tzn.

$$\forall_{1 \le j_1 < j_2 < j_k \le n}$$

$$P(\{\omega \in \Omega : X_{j_1}^{(\omega)} = b_1, \cancel{X}_{j_2}^{(\omega)} = b_2, \dots, X_{j_k}^{(\omega)} = b_k\}) =$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : X_{j_1}(\omega) = b_1\}) \cdot P(\{\omega \in \Omega : X_{j_2}(\omega) = b_2\}) \cdot$$

$$\dots P(\{\omega \in \Omega : X_{j_k}(\omega) = b_k\})$$

gdzie $b_1, b_2 \dots b_k \in \{0,1\}$.

Bierzemy $X \stackrel{df}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Znaleźć d_X

Krok 1. Wyznaczamy $X(\Omega)$

Ponieważ $X_j(\Omega) = \{0,1\}$, więc

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Dla $k \in X(\Omega)$ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$ oznacza, iż bierzemy wszystkie możliwe sytuacje wartości X_j, i

$X(\omega) = k$.

Oznacza to, że w ciągu $(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ jest dokładnie k-jedynek.

Takich ciągów jest $\binom{n}{k}$, a prawdop. takiej sytuacji (z niezależności) $= p^k(1-p)^{n-k}$

<u>WNIOSEK</u> $\underline{X \in B(n, p)}$.

~~Przykład~~

<u>P5</u>. Niech X ma F_X. Oblicz

$$\underbrace{P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) < b\})}_{A_{ab}} \quad a < b$$

Zauważmy, że $A_{ab} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < b\} \setminus \{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\}$

oraz $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\} \subset \{\omega \in \Omega : X(\omega) < b\}$

Stąd $P(A_{ab}) = P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) < b\}}_{F_X(b)}) - P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a}_{F_X(a)}$

P6. Niech X ma F_X. Obliczć

$$P(\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)\leq a\})\qquad a\in\mathbb{R}$$

Zauważmy, że

$$\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)\leq a\}=\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)<a\}\cup$$
$$\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)=a\}$$

Skąd $P(\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)\leq a\})=F_X(a)+P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=a\})$

Ale $P(\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)=a\})=\lim\limits_{t\to a^+}F_X(t)-F_X(a)$

Zatem:

$$P(\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)\leq a\})=\lim_{t\to a^+}F_X(t),$$

dlatego na ogół

$$P(\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)<a\})<P(\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)\leq a\})$$

(iv) <u>Rozkłady ciągłe</u>.

Jeśli dla ZL i jego opisu (Ω, Σ, P) mamy zm. losowe

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{że}$$

$X(\Omega) = I$ - przedział liczbowy, bo niedużo, a

X ma <u>rozkład ciągły</u> (albo całkowicie niedyskretny)

<u>Wtedy</u>: (i) F_X jest różniczkowalna, gdzie

$$F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\})$$

(ii) $\forall_{t_0 \in \mathbb{R}} \ P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = t_0\}) = 0$,

bowiem

$$P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = t_0\}) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq t_0\})$$

$$- P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) < t_0\}) =$$

$$= \lim_{t \to t_0} F_X(t) - F_X(t_0) = F_X(t_0) - F_X(t_0) =$$

$= 0$, bo F_X ciągła, jako różniczkowalna.

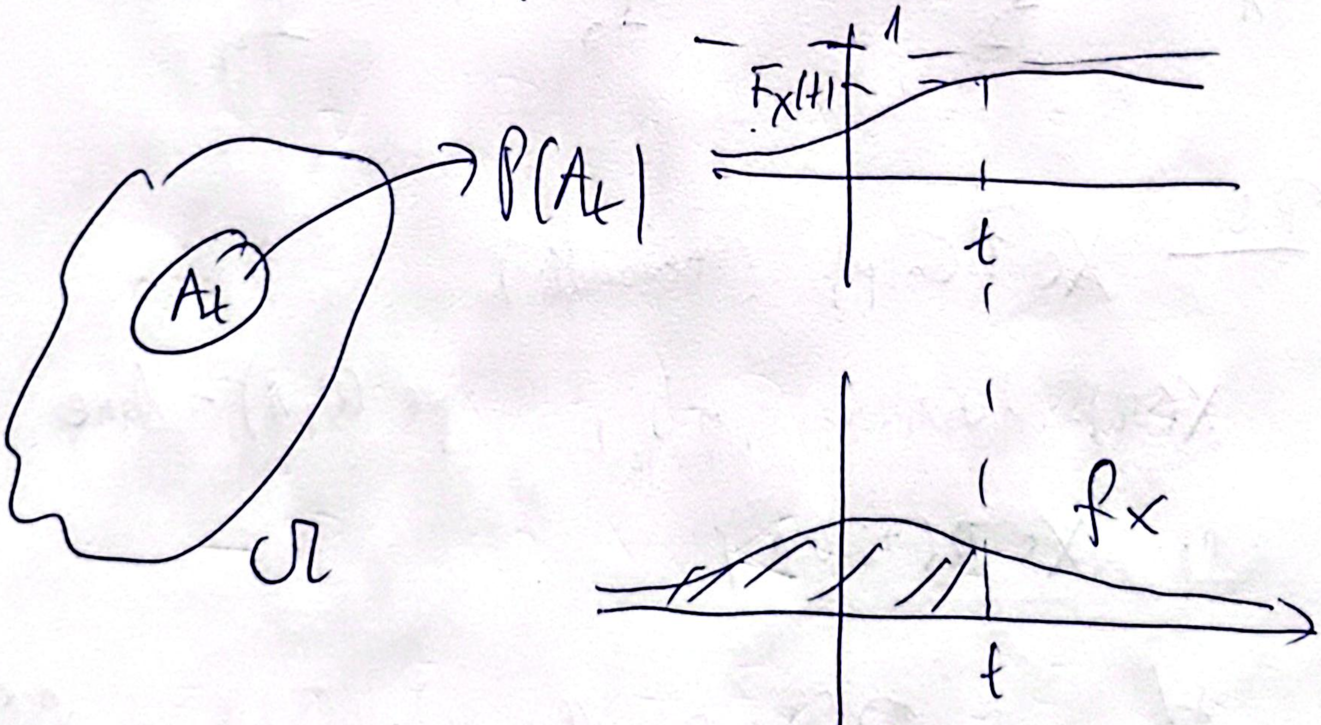
Mamy zatem sytuację całkowicie przeciwną do sytuacji dla przypadku rozkładu dyskretnego.

(iii) $F_X' = f_X$ – nazywamy f. gęstości

(odpowiednik tabelki dla r. ciągłego)

(iv)

$$P(\underbrace{\{\omega\in\Omega : X(\omega)<t\}}_{A_t}) = F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$$



$$\int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$$

i ogólnie

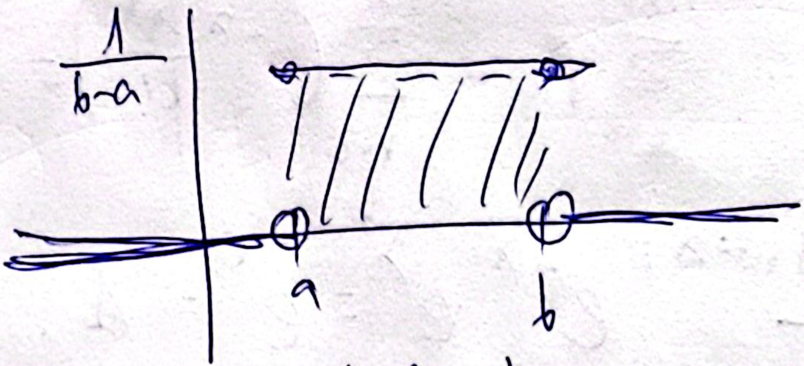
$\forall a < b$

$$P(\{\omega\in\Omega : a \le X(\omega) < b\}) = F_X(b) - F_X(a) =$$
$$= \int_a^b f_X(u)\,du .$$

P.1. (b. ważny w t. symulacji)

$X \in \mathcal{U}([a,b])$, $a<b$ (r. jednostajny)

f_X :



(stąd inna nazwa „prostokątny").

Znajdźmy F_X.

Wiadomo, że $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$.

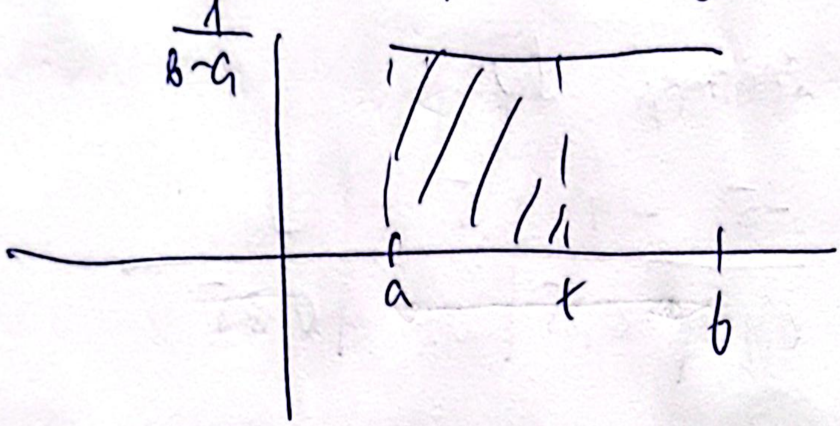
Ponieważ dla $u \notin [a,b]$, $f_X(u) = 0$, więc

$F_X(t) = 0, \quad t \le a$ oraz

$F_X(t) = 1, \quad t \geq b$.

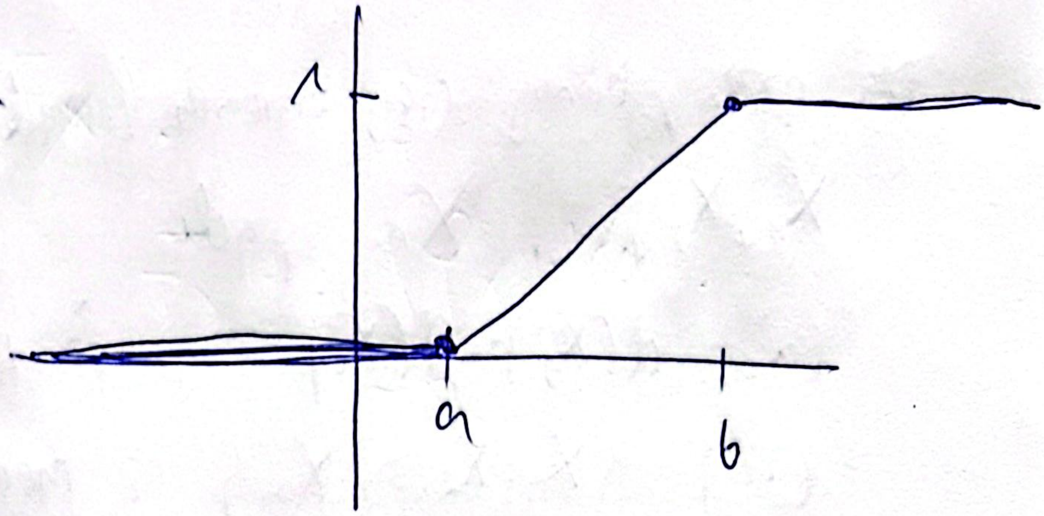
Wystarczy wziąć $t \in (a,b)$.

Wtedy $F_X(t) =$ „pole figury"



$= (t-a) \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{t-a}{b-a}$

F_X :



Uwaga.

1) Jeśli $X \in \mathcal{J}([a,b])$, gdzie $a=0$, $b=1$, to mówimy, że X ma rozkład jednostajny standardowy. Wtedy dla ZL i (Ω, Σ, P)

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow X(\omega) \in [0,1]$$ nazywamy też LICZBĄ LOSOWĄ (RANDOM NUMBER)

Jak zobaczymy dalej, w TS ważne jest aby GENEROWAĆ $X(\omega)$. Wtedy $X(\omega)$ powstała w wyniku tego procesu (generowania) będziemy nazywali LICZBĄ PSEUDO-LOSOWĄ

2) Dla rozkładu jednostajnego mamy tzw. ZASADĘ SKALOWANIA

$$X \in \mathcal{J}([a,b]) \iff \frac{X-a}{b-a} \in \mathcal{J}([0,1]).$$

Uzasadnienie

Niech $X \in \mathcal{J}([a,b])$ i weźmy $Y = \frac{X-a}{b-a}$.

Wtedy: (i) $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) \in [0,1]$

zatem $F_Y(t)=0,\ t\le 0$, $F_Y(t)=1,\ t\ge 1$.

Dla $t\in(0,1)$ mamy

$$F_Y(t)=P(\{\omega\in\Omega: Y(\omega)<t\})=P\left(\left\{\omega\in\Omega: \frac{X(\omega)-a}{b-a}<t\right\}\right)$$

$$=P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)<a+(b-a)t\})=F_X(a+(b-a)t)$$

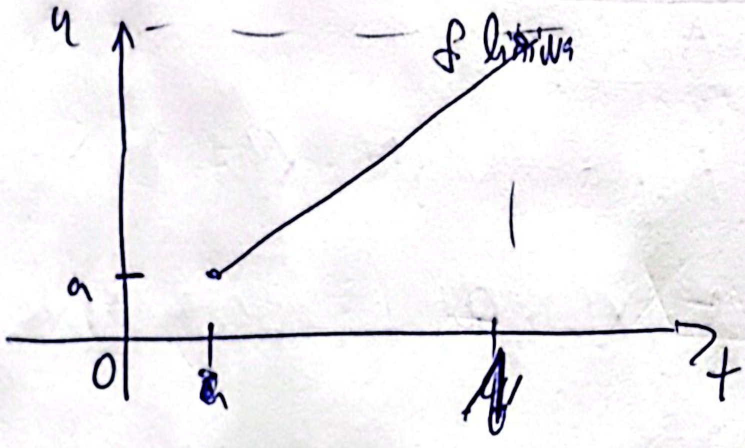
Na tej podstawie obliczymy $f_Y=F_Y'$.

Z zasady różniczkowania f. złożonej mamy

$$f_Y(t)=\frac{d}{dt}F_Y(t)=\frac{d}{dt}F_X(a+(b-a)t)=$$

$$=f_X(a+(b-a)t)\cdot(a+(b-a)t)'=$$

$$=(b-a)\,f_X(\underbrace{a+(b-a)t}_{\text{f liniowa}})$$



Z własności f_X (stała na $[a,b]$), wynika, iż

$$f_Y(t)=\begin{cases}0 & t\notin[0,1]\\ (b-a)\frac{1}{b-a}=1 & t\in[0,1]\end{cases},\ \text{czyli } Y\in\mathcal{J}([0,1]).$$